

THESES

présentées

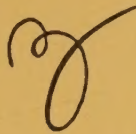
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

TRAN-HUU-HANH



1^{ère} THESE : Contribution à l'étude des plaques percées de nombreux trous
Influence du dudgeonnage

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté*

Soutenues le 29 AVR. 1967 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. RAVILLY
M. TARDY
M. HAMEL } Examineurs

THESES

présentées

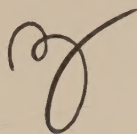
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

TRAN-HUU-HANH



1^{ère} THESE : Contribution à l'étude des plaques percées de nombreux trous
Influence du dudgeonnage

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté*

Soutenues le

devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. RAVILLY	}	Examineurs
M. TARDY		
M. HAMEL		

FACULTE DES SCIENCES

<i>Doyen</i>	M. BRILLOUET	
<i>Assesseur</i>	M. GARRIGUES	
<i>Professeurs Titulaires</i>	MM. BRILLOUET	<i>Mathématiques</i>
	PAUC	«
	PETRESCU	«
	PIRONNEAU	«
	RAFFIN	«
	RAVILLY	«
	VIVIER	«
	BOULLLOUD	<i>Physique</i>
	COLLET	«
	DUNOYER	<i>Chimie</i>
	GRAFF	«
	WOJTKOWIAK	«
	Mlle DEBRAUX	<i>Biologie</i>
	MM. GARRIGUES	«
	PIERI	«
	SELLIER	«
<i>Professeurs et Maîtres de Conférences</i>	MM. MOLINARO	<i>Mathématiques</i>
	AVIGNON	<i>Physique</i>
	GOUREAUX	«
	GRANGE	«
	LASKAR	«
	MEZENECV	«
	MOUTON	«
	MINN	«
	Mlle OFFRET	«
	MM. GOBIN	<i>Chimie</i>
	JOLIVET	«
	MARTIN	«
	POINTEAU	«
	QUINIOU	«
	ROUXEL	«
	AMOURIQ	<i>Biologie</i>
	Mlle ASTIE	«
	MM. DUPONT	«
	LE DOUARIN G.	«
	LE DOUARIN N.	«
	CAVET	<i>Géologie</i>
	FORESTIER	«
	OTTMANN	«

A mes chers parents

en témoignage de ma profonde affection

et de mon infinie reconnaissance.

AVANT-PROPOS

Ces travaux de recherches sont effectués au Laboratoire de Résistance des Matériaux de l'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE en liaison avec les Etablissements de la MARINE NATIONALE d'Indret qui m'ont aidé pour la réalisation du matériel expérimental.

Je remercie Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de m'avoir encouragé à entreprendre cette thèse et d'avoir bien voulu me faire l'honneur d'assumer la Présidence du Jury.

J'exprime aussi mes remerciements à Monsieur l'Ingénieur Général du Génie Maritime, Directeur des Etablissements d'Indret, qui a bien voulu m'autoriser à y entreprendre certaines de mes expériences.

C'est Monsieur le Professeur TARDY, Chef du Laboratoire de Résistance des Matériaux de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique qui m'a donné l'idée de ces travaux. Il m'a guidé de ses conseils éclairés et m'a fait profiter de son expérience tout au long de cette étude. J'ai toujours trouvé en lui un maître dévoué et compétent. Que ces quelques lignes veuillent bien lui exprimer ma très sincère reconnaissance.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur l'Ingénieur Principal du Génie Maritime HAMEL qui m'a donné de précieux conseils durant l'étude expérimentale à la Marine Nationale d'Indret et qui a accepté de participer au Jury.

Je remercie également Monsieur le Professeur RAVILLY d'avoir bien voulu être membre du Jury.

J'exprime toute ma gratitude au personnel technique de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Etablissements d'Indret qui m'a aidé dans la réalisation des expériences et au personnel de l'Imprimerie de l'E.N.S.M. qui a assuré cette présente édition.

TABLE DES MATIERES

Notations.

Introduction.

Page

1ère partie : ETUDE DES PLAQUES PERCEES DE NOMBREUX TROUS.

I - 1. Etat actuel des connaissances. Méthode de calcul des plaques percées de nombreux trous.	4
I - 2. Vérification des théories précédentes. Détermination expérimentale des constantes élastiques équivalentes.	28
I - 3. Contrainte dans une plaque percée de nombreux trous. Vérification des résultats de SAMPOON.	40
I - 4. Validité des méthodes de calcul des plaques percées. Contrôle des résultats.	64
I - 5. Conclusion.	83

2ème partie.: INFLUENCE DU DUDGEONNAGE DES TUBES SUR LA CONTRAINTE ET LA RIGIDITE .

II - 1. Généralités sur le dudgeonnage. Contraintes induites.	84
II - 2. Effet de raidissement dû à la présence des tubes.	90
II - 3. Influence des contraintes induites.	97
II - 4. Vérifications expérimentales.	99
II - 5. Interprétation des résultats et conclusion.	105

3ème partie : APPLICATION DES METHODES DE CALCUL PRECITEES A UN CAS PARTICULIER : ECHANGEUR DE CHALEUR. COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE.

III - 1. Calculs théoriques.	107
III - 2. Expérience sur l'échangeur.	125
III - 3. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.	130
III - 4. Conclusion.	

Conclusion générale. 138

Bibliographie. 139

NOTATIONS

- a = rayon de la plaque percée.
 H = épaisseur de la plaque percée.
 $2h$ = largeur du ligament.
 $2R$ = pas triangulaire.
 h/R = rapport de la largeur du ligament sur le pas.
 $2r$ = diamètre des trous.
 E = module d'YOUNG de la plaque pleine.
 ν = coefficient de POISSON de la plaque pleine.
 E^* = module d'YOUNG équivalent de la plaque perforée.
 E_h^* = HORVAY en contrainte plane
 E_h^{**} = HORVAY en flexion
 E_m^* = MALKIN en flexion
 E_s^* = SAMPSON
 E_o^* = O'DONNELL
- } Modules d'YOUNG équivalents
- ν^* = coefficient de POISSON équivalent.
 ν_h^* = HORVAY en contrainte plane
 ν_h^{**} = HORVAY en flexion
 ν_m^* = MALKIN en flexion
 ν_s^* = SAMPSON
 ν_o^* = O'DONNELL
- } Coefficients de POISSON équivalents
- D = rigidité de la plaque pleine $D = \frac{E H^3}{12 (1 - \nu^2)}$
 D^* = rigidité de la plaque percée $D^* = \frac{E^* H^3}{12 (1 - \nu^{*2})}$
 Y = coefficient de majoration de contrainte.
 β = biaxialité ou rapport des contraintes principales $(-1 \leq \beta \leq 1)$.
 η_w = coefficient de déflexion.
 η_o = coefficient de ligament.
 P = charge concentrée.
 p = pression répartie.
 σ = contrainte normale.
 τ = contrainte de cisaillement.
 ϵ = allongement unitaire.

Au cours du texte les numéros entre crochets [] renvoient à la bibliographie rassemblée en annexe.

- I N T R O D U C T I O N -

Les plaques percées avec tubes dudgeonnés trouvent de nombreuses applications dans les capacités sous pression, en particulier dans les échangeurs de chaleur et les réacteurs nucléaires.

Les plaques à tubes, objet de notre étude, sont des plaques circulaires, d'épaisseur constante, percées de nombreux trous dans lesquels les tubes sont fixés de façon étanche par dudgeonnage.

Une plaque d'échangeur de 3 mètres de diamètre peut recevoir plusieurs milliers de tubes. Lorsqu'elle présente une amorce de rupture ou une fuite, la réparation est difficile et provoque une longue interruption du fonctionnement de l'installation. On comprend pourquoi les Ingénieurs attachent une grande importance aux calculs de ces plaques et à leur dimensionnement. Le problème est de déterminer l'épaisseur minimale compatible avec une bonne résistance.

Pendant très longtemps, les constructeurs d'échangeurs ont utilisé des formules données par la T.E.M.A. (Tubular Exchangers Mechanical Association) pour déterminer l'épaisseur de la plaque. Ces formules sont empiriques et sont basées sur celles donnant la contrainte maximale dans une plaque circulaire mince sous pression uniforme. Elles ne tiennent pas compte des effets d'affaiblissement dus à des quinconçages différents.

GARDNER (1948) est, à notre connaissance, le premier à donner une méthode de calcul plus rationnelle. Il suppose que la plaque percée a la même dimension que la plaque pleine fictive ayant une rigidité plus faible due à la présence des trous. Cette perte de rigidité est introduite par le coefficient de déflexion qui est fonction du quinconçage. La contrainte réelle est obtenue en divisant la contrainte calculée par un coefficient de ligament qui tient compte de la présence des trous [1], [2], [3]. Divers coefficients ont été proposés ultérieurement par MILLER (1952) [4], DUNCAN (1955) [5] et VOLOSHIN (1963) [6]. C'est la méthode des coefficients de ligament et de déflexion.

HORVAY en 1952 a proposé une autre méthode de transformation de la plaque pleine en plaque équivalente [7]. Suivant cette méthode, la plaque percée

est traitée comme une plaque pleine, mais avec des constantes élastiques fictives appelées constantes élastiques équivalentes (module d'YOUNG et coefficient de POISSON équivalents). La contrainte réelle est obtenue en majorant, par un certain coefficient, la contrainte trouvée dans ces plaques équivalentes. Les constantes élastiques équivalentes et les courbes de majoration de contrainte ont été déterminées soit théoriquement par HORVAY (1952) [7], [8], MALVIN (1952) [9], soit expérimentalement par SAMPSON (1959) [11].

Devant cette diversité, il est nécessaire de savoir quelle est la méthode qui donne le meilleur résultat dans la pratique.

Notre premier travail a donc consisté dans l'étude comparative des diverses méthodes de calcul. Nous avons recherché les valeurs des constantes élastiques équivalentes à utiliser.

Mais les plaques en cause sont en général munies de tubes qui viennent modifier leur résistance. Jusqu'à présent pour calculer ces plaques avec tubes dudgeonnés, les auteurs précités ont négligé la présence des tubes [1], [7], [16]. Peu d'études ont été faites à ce sujet.

La 2ème partie de notre travail a consisté à étudier comment les contraintes induites dues au dudgeonnage influencent l'état de contrainte dans la plaque et dans quelle mesure la présence des tubes contribue à rigidifier celle-ci.

Enfin, nous avons fait l'application de diverses théories au calcul d'un échangeur déjà en service et dans lequel la plaque à tubes fait partie d'une structure. Nous verrons comment la rigidité de la plaque perforée va affecter les contraintes calculées dans le reste de la structure comme dans la plaque elle-même.

1ère PARTIE

ETUDE DES PLAQUES PERCEES DE
NOMBREUX TROUS.

I - 1. ETAT ACTUEL DES CONNAISSANCES .

METHODES DE CALCUL DES PLAQUES PERCEES DE NOMBREUX TROUS .

Pour calculer les plaques à tubes, on suppose que la plaque perforée peut être remplacée par une plaque pleine équivalente. Le travail consiste à déterminer la déformation et la contrainte maximale dans cette plaque équivalente et d'en déduire la contrainte maximale dans la plaque réelle perforée.

Les 2 méthodes de calcul qui transforment la plaque perforée en plaque équivalente sont :

- 1° - La méthode des coefficients de ligament et de déflexion ,
- 2° - La méthode des constantes élastiques équivalentes.

I - 1,1. METHODE DES COEFFICIENTS DE LIGAMENT ET DE DEFLEXION.

I - 1,11 - Principe de la méthode.

Les calculs sont effectués en supposant la plaque pleine. L'influence du perçage étant introduite par les coefficients de déflexion η_w et de ligament η_σ .

Coefficient de déflexion η_w : la plaque équivalente a les mêmes caractéristiques que la plaque réelle, sauf sa rigidité à la flexion. La rigidité à la flexion de la plaque équivalente D^* est prise égale à une fraction de la rigidité D de la plaque pleine :

$$D^* = \eta_w \cdot D \quad \dots(I-1,11 - 1)$$

η_w est toujours inférieur à 1. Ce coefficient tient compte de l'affaiblissement par la présence des trous.

Coefficient de ligament η_σ : la plaque équivalente est calculée par les méthodes habituelles et la contrainte maximale dans cette plaque équivalente est ainsi déterminée. Cette contrainte est divisée par un coefficient η_σ pour avoir la contrainte maximale dans la plaque percée réelle. L'inverse de η_σ est le facteur de majoration de contrainte qui permet de tenir compte de la présence des trous.

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\eta_\sigma} \quad \eta_\sigma < 1 \quad \dots(I-1,11-2)$$

I - 1,12 - Les divers groupes de coefficients proposés.

GARDNER (1948) [1] est le premier à proposer cette méthode en suggérant de déterminer expérimentalement les coefficients η_w et η_σ .

I - 1,121 - Coefficients de MILLER (1952) [4].

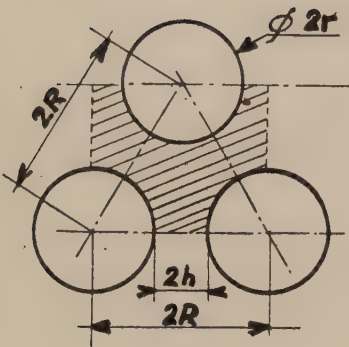
L'auteur suppose que les coefficients de déflexion et de ligament sont égaux et constants sur toute la surface de la plaque. Par déduction des connaissances antérieures, l'auteur définit ces coefficients comme :

$$\eta_w = \eta_\sigma = \frac{A-C}{A} = 1 - \frac{C}{A}$$

où A est la surface totale et C la surface des trous.

Pour le pas triangulaire, d'après la figure I-1,12-1, on a :

$$\frac{C}{A} = \frac{\frac{\pi(2r)^2}{4}}{(2R) \times \frac{(2R)\sqrt{3}}{2}}$$



Finalement, on obtient les coefficients de ligament et de déflexion pour le pas triangulaire :

$$\eta_w = \eta_\sigma = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \frac{(2r)^2}{(2R)^2} \quad \dots(I-1,12-1)$$

où $2r$ est le diamètre des trous percés dans la plaque et $2R$, le pas triangulaire.

Fig. I-1,12-1
Perçage à pas triangulaire

I - 1,122 - Coefficients de DUNCAN (1955) [5].

L'auteur détermine expérimentalement les coefficients η_w et η_σ .
La rigidité de la plaque équivalente est définie par

$$D^* = \eta_w D$$

Comme la flèche est inversement proportionnelle à la rigidité, on a :

$$w' = \frac{w}{\eta_w} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} w' : \text{flèche de la plaque percée.} \\ w : \text{flèche de la plaque pleine.} \end{array}$$

Pour un chargement donné, il suffit de mesurer w' et w et d'en déduire $\frac{1}{\eta_w}$.

De même, le coefficient de ligament est défini par :

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\eta_\sigma} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \sigma' : \text{contrainte dans la plaque percée} \\ \sigma : \text{contrainte au même point dans la plaque pleine.} \end{array}$$

En mesurant les contraintes dans la plaque pleine et dans la plaque percée sous le même chargement, on peut en déduire : $\frac{1}{\eta_\sigma}$.

L'auteur a poursuivi 2 objectifs :

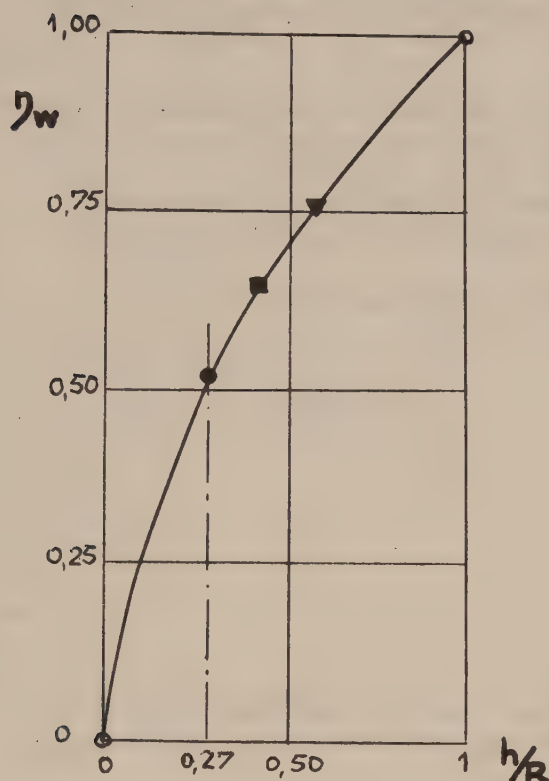
1° - Détermination des coefficients de ligament et de déflexion lorsque la plaque est percée avec :

- 2 bandes perpendiculaires non percées,
- 1 bande non percée,
- entièrement percée.

ceci pour le quinconçage standard $\frac{h}{R} = 0,2,7$.

2° Détermination de ces mêmes coefficients pour des plaques avec une bande non percée lorsque h/R varie.

Dans le premier cas, l'auteur utilise la méthode de chargement concentré d'une plaque sur appui simple; dans le 2^e cas, il utilise la méthode de simulation de pression hydrostatique.



En conclusion de cette importante étude expérimentale, l'auteur donne les résultats suivant :

- Pour les plaques à quinconçage standard ($h/R = 0,27$), on a :

- complètement percée $\eta_w = \eta_\sigma = 0,4$
- 1 bande non percée $\eta_w = \eta_\sigma = 0,5$
- 2 bandes non percées $\eta_w = \eta_\sigma = 0,6$

- pour les plaques à une bande non percée, à quinconçage variable, on a :
(fig. I-1,12-2)

$$\eta_w = \sqrt{\frac{h}{R}} \quad \dots (I-1,12-2)$$

L'étude n'est pas générale.

Elle ne précise pas l'influence de la largeur de la bande non percée. Les jauges sont collées sur la partie non percée (la contrainte est sans doute plus grande dans les ligaments).

Fig. I-1,12-2. Coefficient de déflexion en fonction de h/R ,

- ▼ trou Ø 2,34 mm
- trou Ø 3,18 mm
- trou Ø 3,97 mm

I - 1,123 - Coefficients de VOLOSHIN (1963) [6].

VOLOSHIN a essayé 5 plaques percées avec réseau triangulaire et une plaque pleine, toutes de diamètre extérieurs 300 mm, d'épaisseur 20 mm, de diamètre des trous 12 mm. Pour faire varier le quinconçage, il a modifié le pas. On a ainsi :

$$\frac{2r}{2R} = 0,5 - 0,6 - 0,7 - 0,8 - 0,9.$$

Toutes ces plaques sont issues d'un même lingot d'acier au carbone. Appuyées à la périphérie, ces plaques sont chargées au centre

dans le domaine élastique et dans celui des petites déformations plastiques.

Le coefficient η_w est défini comme le rapport du coefficient angulaire de la partie rectiligne de la courbe représentant la déformation la plus grande en fonction de la force exercée pour la plaque percée, au coefficient angulaire similaire pour la plaque pleine.

L'inverse du coefficient de ligament η_σ (ou coefficient de majoration de contrainte) est défini comme le rapport de la force maximale, c'est à dire correspondant sur la courbe représentant la plus grande déformation en fonction de la force exercée, au début de l'infléchissement (entrée dans le domaine plastique) pour la plaque pleine, à la force similaire pour la plaque percée.

L'auteur donne des résultats sous forme de courbes. (Fig. I-1,12-3)

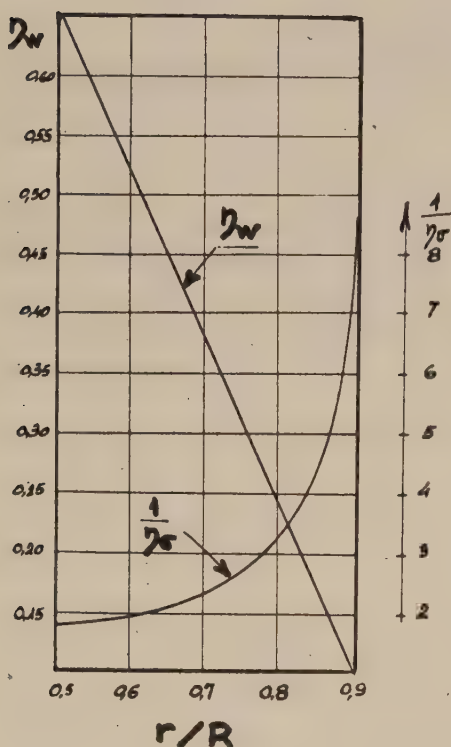


Fig. I-1,12-3 Coefficient de déflexion η_w et facteur de majoration de contrainte $1/\eta_\sigma$ en fonction de $\frac{r}{R}$.

r : rayon des trous.

R : 1/2 pas.

I - 1,13 - Critiques et comparaisons.

Les résultats de MILLER et de DUNCAN coïncident à peu près pour les faibles quinconçages. Quand h/R augmente, cet écart s'accroît (Fig. I-1,13-1). Les résultats de VOLOSHIN sont nettement plus faibles qu'aux précédents.

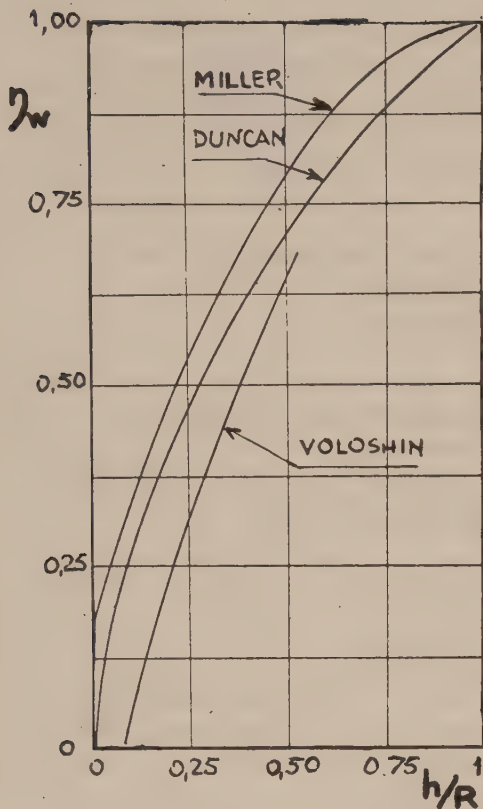


Fig. I-1,13-1. Comparaison des coefficients de déflexion.

I - 1,2. METHODE DES CONSTANTES ELASTIQUES EQUIVALENTES .

I - 1,21 - Principe de la méthode .

On détermine le module d'YOUNG équivalent E^* et le coefficient de POISSON équivalent ν^* . Ces constantes tiennent compte de la présence des trous. Connaissant E^* et ν^* , on peut calculer les contraintes et les déformations avec les formules des plaques pleines. En multipliant la contrainte maximale ainsi calculée dans la plaque équivalente par le facteur de majoration de contrainte Y , on obtient la contrainte maximale dans la plaque perforée réelle. Ce facteur dépend de la biaxialité β , c'est-à-dire le rapport des contraintes principales ($-1 \leq \beta \leq 1$) et du rapport de la largeur de ligament sur le pas h/R .

Des déterminations théoriques et expérimentales de E^* , ν^* et Y ont été faites par plusieurs auteurs.

I - 1,22 - Les divers groupes de constantes proposées .

Dans la méthode des coefficients de ligament et de déflexion, les flèches sont calculées avec la rigidité $D^* = \eta_w D$ et le coefficient de POISSON ν est pris égal à celui du matériau. Pour être rigoureux, il faut prendre le coefficient de POISSON équivalent ν^* , car les études ultérieures ont montré que ν^* varie avec h/R . On ne fait pas non plus la distinction entre les plaques épaisses et les plaques minces. Par la suite, on s'est aperçu que $\eta_w = D^*/D$ varie avec l'épaisseur H/R pour le même quinconçage.

De même les contraintes sont calculées avec ν du matériau, ce qui n'est pas logique. D'autre part le facteur de majoration de contrainte $Y = 1/\eta_\sigma$ est constant dans cette théorie, alors qu'il dépend de la biaxialité $\beta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1$ comme nous verrons plus loin (σ_1, σ_2 : contraintes principales).

La localisation de la contrainte maximale n'a pas été définie (au bord des orifices ou dans un ligament quelconque).

De toutes ces observations, on conclut que la méthode est peu rigoureuse, mais a l'avantage d'être simple. Elle a rendu bien des services dans la construction des échangeurs.

I - 1,221 - Constantes équivalentes de HORVAY (1952) [7] obtenues en contrainte plane.

HORVAY a obtenu ces constantes analytiquement en faisant une approximation qui consiste à remplacer les trous par des hexagones de même surface. On obtient ainsi une structure de "nid d'abeille", c'est-à-dire une grille composée de barreaux liés entre-eux rigidement et travaillant en traction, au cisaillement et en flexion, lorsque la plaque est soumise à une contrainte plane. (Fig. I-1,22-1).

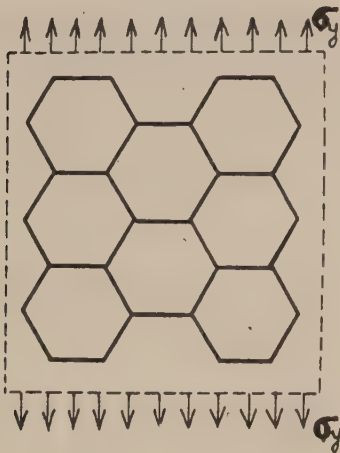


Fig. I-1,22-1. Grille d'hexagones en traction.

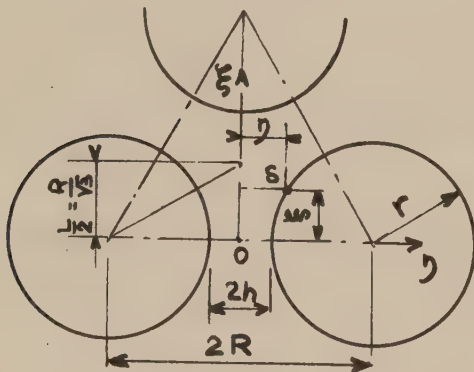
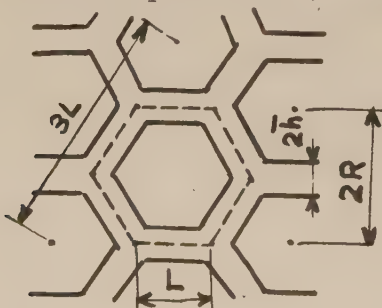


Fig. I-1,22-2. Détails montrant les différents paramètres.



On peut calculer la déformation de la grille sous l'action de σ_y ,

$$\text{d'où } \nu^* = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$$

Le coefficient de POISSON équivalent est ainsi trouvé égal à :

$$\nu^* = 1 - \frac{4}{3 + 2(1 + \nu) n \frac{L^2 \bar{h}}{4 h^3}}$$

où ν : coefficient de POISSON de la plaque pleine

n : facteur compris entre 1 et 1,5, mais généralement pris égal à 1,2. Ce facteur relie la déformation due au cisaillement à la contrainte de cisaillement.

$2\bar{h}$: largeur moyenne de ligament,

$$2\bar{h} = \frac{L}{\int_0^{L/2} \frac{d\xi}{d\eta}} \dots (I-1,22-1)$$

$2h'$: largeur uniforme d'un barreau de longueur L , qui se déforme de la même façon que le ligament réel sous l'effet du moment de flexion.

$$2h' = \frac{L}{\left[\int_0^{L/2} \frac{3\xi^2 d\xi}{\eta^3} \right]^{1/3}} \dots (I-1,22-2)$$

L : longueur du barreau

ξ, η : coordonnées du point S , (fig. I-1,22-2)

L'expression de ν^* précédemment trouvée peut être mise sous forme :

$$\nu^* = 1 - \frac{4}{5,4 + 2,4\nu + \frac{4}{3} \left(\frac{h}{h'}\right)^2 \left(\frac{R}{h}\right)^2 \left(\frac{\bar{h}}{h} \times \frac{h}{h'}\right)}$$

Fig. I-1,22-3. Structure de "nid d'abeille"

$\frac{h'}{h}$ et $\frac{\bar{h}}{h}$ peuvent être obtenus par intégration graphique ou analytique.

Le densité relative de la plaque perforée est déterminée par le rapport $\bar{h}/R$. Il est logique de penser que la raideur est proportionnelle à $\bar{h}/R$, ce qui revient à dire que la plaque perforée se déforme comme une plaque pleine avec le module d'YOUNG équivalent :

$$E^* = A \cdot E \frac{\bar{h}}{R} \quad \text{avec} \quad A = 1 - \nu^*$$

Cette expression peut s'écrire :

$$\frac{E^*}{E} = (1 - \nu^*) \frac{h}{R} \times \frac{\bar{h}}{h}$$

Les constantes équivalentes sont donc :

$$\begin{cases} \nu^* = 1 - \frac{4}{5,4 + 2,4\nu + \frac{1}{3} \left(\frac{R}{h'}\right)^2 \left(\frac{\bar{h}}{h'}\right)} \\ \frac{E^*}{E} = (1 - \nu^*) \frac{\bar{h}}{R} \end{cases} \quad \dots(I-1,22-3)$$

Les courbes de E^*/E et ν^* en fonction de h/R sont tracées à la Fig. I-1,22-4.

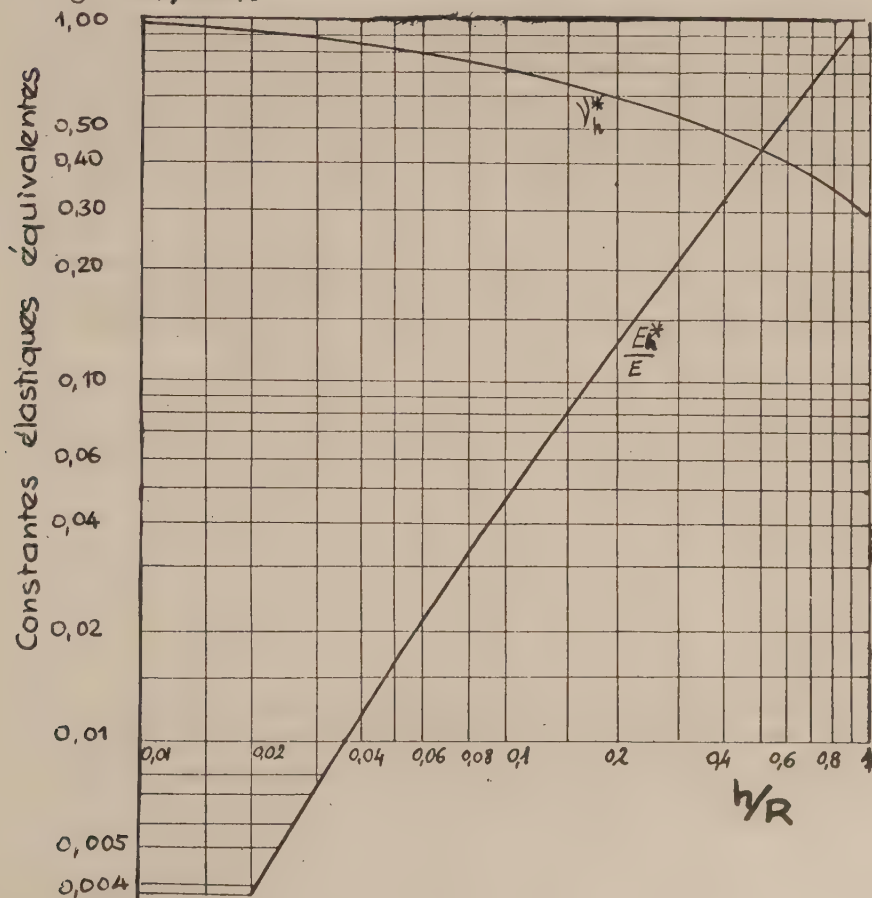


Fig. I-1,22-4

Module d'YOUNG E_h^* et coefficient de POISSON ν_h^* pour une plaque percée avec $\nu = 0,3$ en fonction de h/R .

La théorie suppose les ligaments faibles. Pour $h/R > 0,2$, l'auteur propose l'extrapolation.

Facteur de majoration de contrainte Y de HORVAY .

La structure de "nid d'abeille" précédente est soumise à des contraintes principales σ_1 et σ_2 .

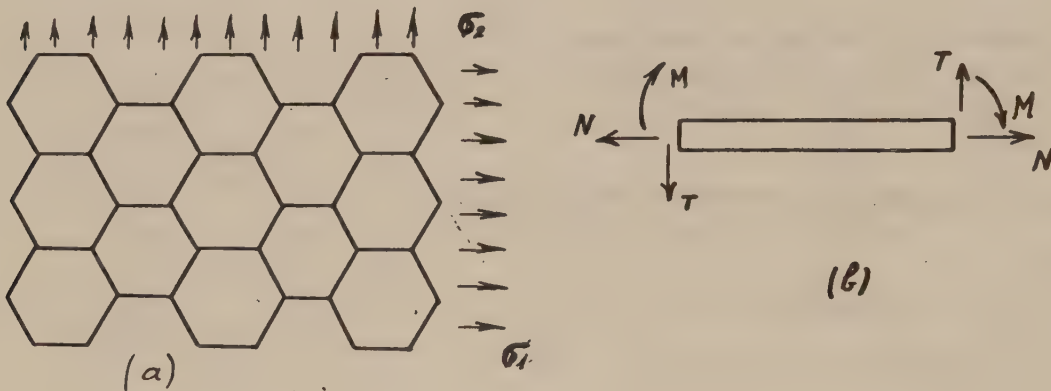


Fig. I-1,22-5.

Sous l'effet de ces contraintes, chaque barreau est soumis à l'effort normal N , à l'effort tranchant T , et au moment de flexion M que l'on peut calculer (Fig. I-1,22-5b). On peut donc en déduire la contrainte maximale dans le ligament. Cette contrainte est normale aux sections de ligament et se trouve dans la section minimale si le ligament est soumis à la traction simple. Dans le cas général, elle se déplace de part et d'autre de cette section.

En faisant varier les directions principales, HORVAY a trouvé que les ligaments inclinés à 45° subissent les contraintes les plus grandes. L'auteur a établi le facteur de majoration de contrainte pour 3 cas : (Fig. I-1,22-6)

- $\beta = 0$: traction simple .
- $\beta = 1$: chargement isotropique .
- $\beta = -1$: cisaillement pur .

$$\text{où } \beta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (-1 \leq \beta \leq 1)$$

La structure n'est assimilable à un "nid d'abeille" que si $h/R < 0,2$. Pour les valeurs de $h/R > 0,2$, les courbes sont extrapolées : pour $h/R = 1$ (trou infiniment petit, autrement dit trou de dimension finie dans une plaque infinie), les facteurs de majoration de contrainte sont bien connus : 4, 3, 2.

Pour les valeurs intermédiaires de β , l'auteur propose l'interpolation entre les courbes.

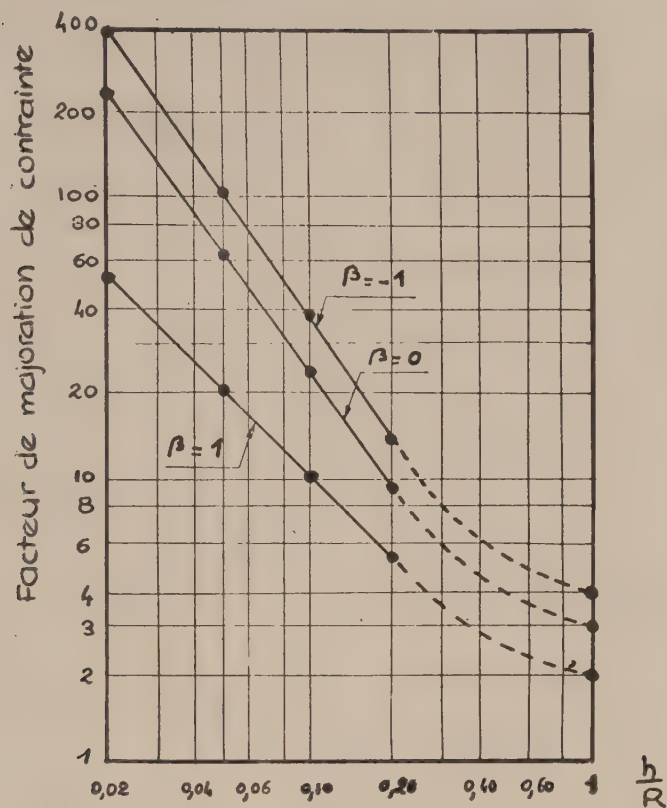


Fig. I-1,22-6

Facteur de majoration de contrainte de HORVAY en fonction de h/R .

I - 1,222 - Constantes équivalentes de HORVAY en flexion (1952) [8].

Les trous sont toujours assimilés à des hexagones de même surface.

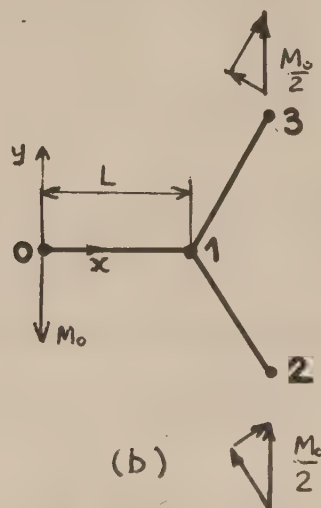
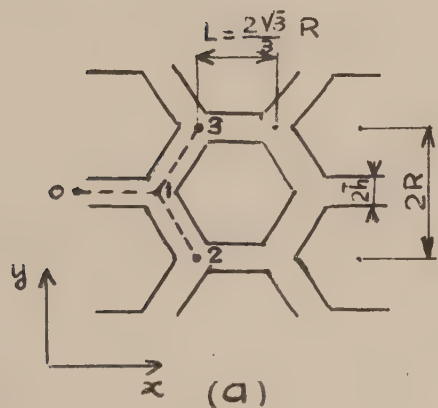


Fig. I-1,22-7

structure de "nid d'abeille".

La figure I-1,22-7 b montre que si le moment M_x par unité de longueur agit sur les bords gauche et droit de la plaque de la figure I-1,22-7 a, la poutre $\bar{01}$ est soumise à un moment $M_0 = 2R M_x$, tandis que les poutres $\bar{13}$ et $\bar{12}$ sont soumises à des moments $M_0/2$ chacune. Le moment $M_0/2$ se décompose en un moment de torsion $(\sqrt{3}/4)M_0$ et en un moment de flexion $M_0/4$.

Ces moments donnent une rotation φ en flexion et ψ en torsion des poutres $\bar{01}$ et $\bar{12}$. Ces rotations sont égales à :

$$\begin{cases} \varphi_{01} = \frac{M_0 L}{B} \\ \psi_{01} = 0 \end{cases} \quad \text{où } B : \text{rigidité en flexion.}$$

$$\begin{cases} \varphi_{12} = \frac{M_0 L}{4B} \\ \psi_{12} = \frac{\sqrt{3} M_0 L}{4C} \end{cases} \quad \text{où } C : \text{rigidité en torsion.}$$

Par conséquent les courbures sont :

$$k_x = \frac{\varphi_{01} + \frac{\varphi_{12}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_{12}}{\frac{3L}{2}} = \left(\frac{3}{B} + \frac{1}{C} \right) 2R M_x \quad \dots(I-1,22-4)$$

$$k_y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \varphi_{12} - \frac{\psi_{12}}{2}}{\frac{\sqrt{3}L}{2}} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) 2R M_x \quad \dots(I-1,22-5)$$

Sachant que : $\nu^{*'} = \frac{-k_y}{k_x}$ et $\frac{EI_{solide}^{*'}}{I_{solide}} = \frac{M_x/k_x}{H^3/12}$

I_{solide} : moment d'inertie de la section d'une bande de largeur unité d'épaisseur H .

$EI_{solide}^{*'}$: rigidité de la même bande avec perforation.

On en déduit :

$$\nu^{*'} = \frac{1-K}{1+3K}$$

$$\frac{E^{*'}}{E} = (1-\nu^{*'}) \frac{\bar{h}}{R} \quad \text{dans lequel } K = \frac{C}{B} = \frac{C}{EI}$$

Ces expressions peuvent se mettre sous forme :

$$\begin{cases} \nu = \frac{1-K}{1+3K} \\ \frac{E^{*'}}{E} = (1-\nu^{*'}) \frac{\bar{h}}{R} \frac{\bar{h}}{h} \end{cases} \quad \dots(I-1,22-6)$$

$$\text{où } K = \frac{6k_1}{1+\nu} \left(\frac{2\bar{h}}{H} \right)^2 = \frac{6k_1}{1+\nu} \left(2 \frac{\bar{h}}{h} \frac{R}{H} \cdot \frac{h}{R} \right)^2 \quad \dots(I-1,22-7)$$

k_1 est une fonction de $2\bar{h}/H$ [35].

k_1 et K sont calculés par LEVEN [13] pour différentes valeurs de h/R .

D'où les courbes de E^*/E et ν^* en fonction de h/R : (Fig. I-1,22-8).

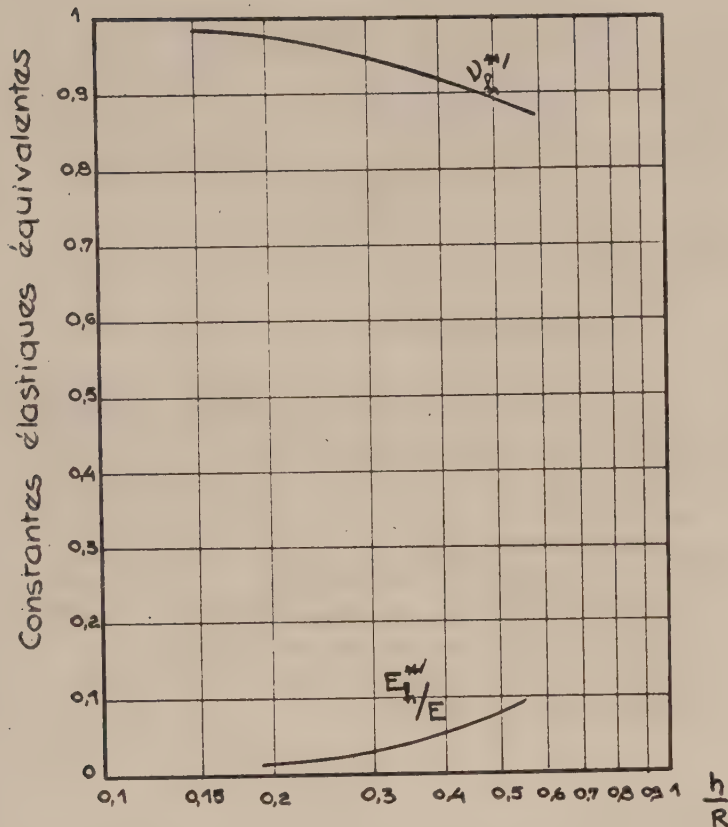


Fig. I-1,22-8 - Constantes élastiques équivalentes de HORVAY en flexion en fonction de h/R .

La théorie n'est valable que pour les plaques minces.
Pour les plaques épaisses, la théorie du § I-1,221 est applicable.

I - 1,123 - Constantes équivalentes de MALKIN en flexion (1952) [9].

L'auteur assimile ici encore les trous circulaires à des trous hexagonaux de même surface. ce qui permet de considérer la plaque percée comme un système d'éléments de poutres soumis à la flexion et à la torsion.

Dans le système de coordonnées rectangulaires $x y z$, dont la surface moyenne de la plaque est le plan $x y$, l'énergie de déformation d'une plaque pleine en flexion est :

$$U = \frac{E H^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{\phi} [(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2)] dx dy \quad \dots(I-1,22-8)$$

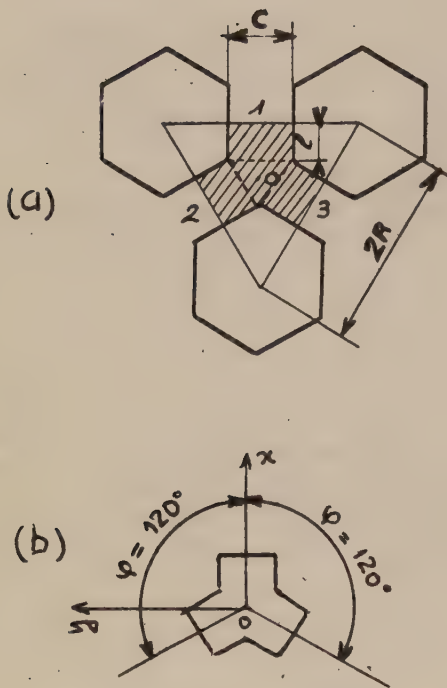


Fig. I-1,22-9.

où :

E et ν sont respectivement le module d'YOUNG et le coefficient de POISSON de la plaque pleine.

H : épaisseur de la plaque .

w : flèche de la plaque .

w_{xx} : dérivée seconde de w par rapport à x .

Φ : domaine d'intégration de la plaque dans son plan moyen .

$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy} + \dots$$

(Δ : Laplacien)

L'énergie de déformation de la plaque idéalisée est obtenue en calculant l'énergie de déformation de l'élément de poutre $\overline{O1}$, sous la flexion de la torsion et en déduisant celle des éléments $\overline{O2}$ et $\overline{O3}$ par changement d'axes (Fig. I-1,22-9 b). La somme de ces 3 énergies donne celle de l'élément hachuré. Comme la plaque idéalisée est décomposée en éléments hachurés, on obtient l'énergie totale en intégrant sur toute la plaque, ce qui donne :

$$U^* = \frac{3+K}{16\sqrt{3}} \frac{ElcH^3}{(2R)^2} \iint_{\Phi} [(\Delta w)^2 - 4 \frac{1+K}{1-K} (w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)] dx dy \dots (I-1,22-9)$$

où c : largeur de l'élément de poutre .

l : longueur de l'élément de poutre (demi longueur du côté de l'hexagone).

$2R$: pas triangulaire (Fig. I-1,22-9 a).

K : rapport de la rigidité en torsion et de la rigidité en flexion EI .

Ainsi, $K = \frac{C}{EI}$ avec $C = \frac{\beta H c^3 E}{2(1+\nu)}$... (I-1,22-10)

β , coefficient donné dans la référence [36] .

En comparant ces énergies calculées, on en déduit :

$$\nu^* = \frac{1-K}{1+K}$$

$$E^* = \frac{1+K}{3+K} m E = (1-\nu^*) \frac{m}{2} E$$

avec $m = \frac{3lc}{\sqrt{3}(2R)^2}$ qui est le rapport de la surface occupée par les 3 ligaments adjacents de longueur l et de largeur c (non compris le petit triangle entourant le point O), à la surface de la cellule qui lui est associée, c'est à dire le triangle équilatéral de pas $2R$.

MALKIN a suggéré alors que pour les ligaments longs et étroits, où c est petit par rapport à $2R$, ce rapport m peut être pris égal au rapport de la surface occupée par les ligaments à la surface totale.

$$\text{Donc } m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(2R)^2 - \pi r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}(2R)^2} = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \dots(I-1,22-11)$$

Dans ces conditions, les expressions de m tendent vers la même valeur. De la 1ère expression pour les ligaments étroits, on a :

$$m \approx 2 \frac{c}{(2R)}$$

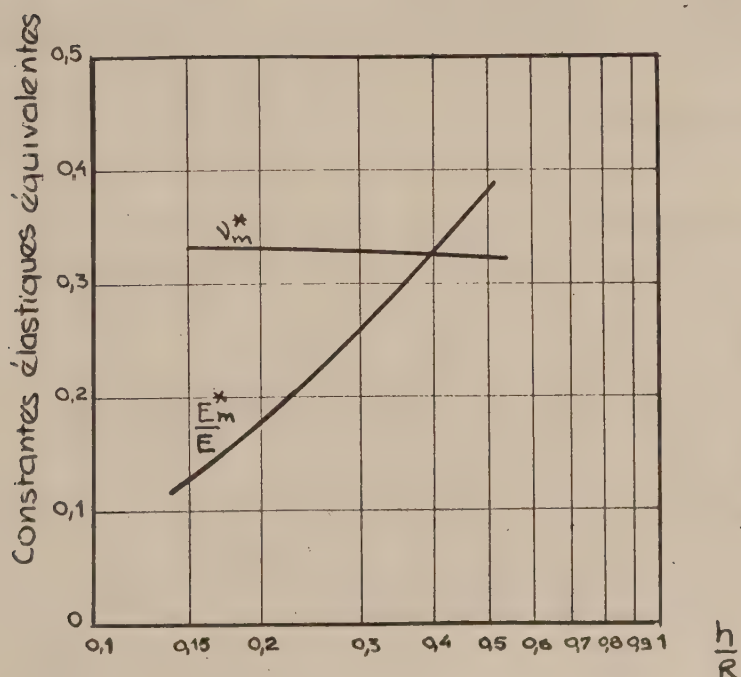
$$\text{Donc } E^* = (1-\nu^*) \frac{c}{2R} E$$

LEVEN a suggéré que c doit être considéré comme la largeur moyenne de ligament [13].

$c = 2\bar{h}$ où $\bar{h}$ est défini précédemment par HORVAY.

Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} \nu^* = \frac{1-K}{3+K} \\ E^* = (1-\nu^*) \frac{\bar{h}}{R} E \end{cases} \quad \dots(I-1,22-12)$$



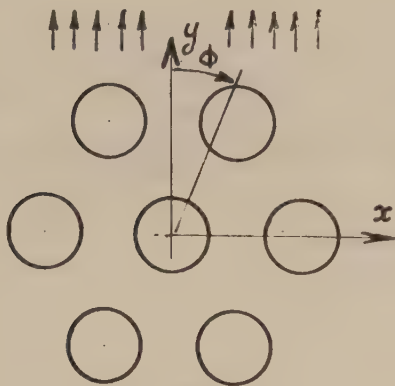
On peut donc tracer les courbes de E^*/E et ν^* en fonction de h/R .

Fig. 1-1,22-10 - Constantes élastiques équivalentes de MALKIN en flexion.

I - 1,224 - Constantes élastiques équivalentes de SAMPSON
en traction (1959) [11].

SAMPSON a déterminé expérimentalement les constantes élastiques équivalentes par mesure sur des échantillons en plastique de coefficient de POISSON $\nu = 0,5$ par la technique du "figeage de contrainte". On marque sur l'échantillon des repères d'une distance convenable et on mesure cette distance avant et après "figeage" à l'aide d'un microscope de précision.

Les modèles ont été conçus de façon que l'on puisse appliquer des tensions uniaxiales, les uns dans la direction x , les autres dans la direction y , et ceci pour différentes valeurs de h/R . Les constantes élastiques sont obtenues conformément aux définitions :



$$E_y^* = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y}$$

$$\nu_y^* = \frac{\epsilon_{\pi/2}}{\epsilon_y} \quad \dots (I-1,22-13)$$

où $\sigma_y = F/S$ contrainte nominale.

F : force appliquée.

S : section de l'éprouvette, égale à la largeur multipliée par l'épaisseur.

ϵ_y : allongement unitaire dans la direction $\phi = 0$.

$\epsilon_{\pi/2}$: allongement unitaire dans la direction $\phi = \frac{\pi}{2}$.

E_y^*/E et E_x^*/E sont trouvés approximativement identiques, tandis que ν_y^* et ν_x^* varient avec la direction des forces appliquées. Ceci montre le caractère anisotrope de la plaque percée.

Les résultats expérimentaux sont portés sur la Fig. I-1,22-12 .

I - 1,225 - Constantes équivalentes de SAMPSON en flexion (1959) [11].

L'auteur a procédé également par "figeage de contrainte" des modèles en plastique de $\nu = 0,5$.

L'échantillon est soumis à la flexion pure avec un dispositif expérimental approprié et prend un rayon de courbure constant ρ . ρ peut être déterminé à partir de la courbe de flèche à la manière suivante :

En prenant l'origine le milieu de la barre, on a :
 (Fig. I-1,22-11)

$$\rho^2 = (\rho - z)^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{z} + z \right)$$

$$\text{or } z \ll y \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{y^2}{2z}$$

D'autre part, la relation fondamentale de la flexion donne :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E^* I}$$

Donc :

$$E^* = M \frac{y^2}{2I}$$

ν^* est donné par mesure de déformations à la surface.

Fig. I-1,22-11.

Flèche de la bande perforée en flexion pure.

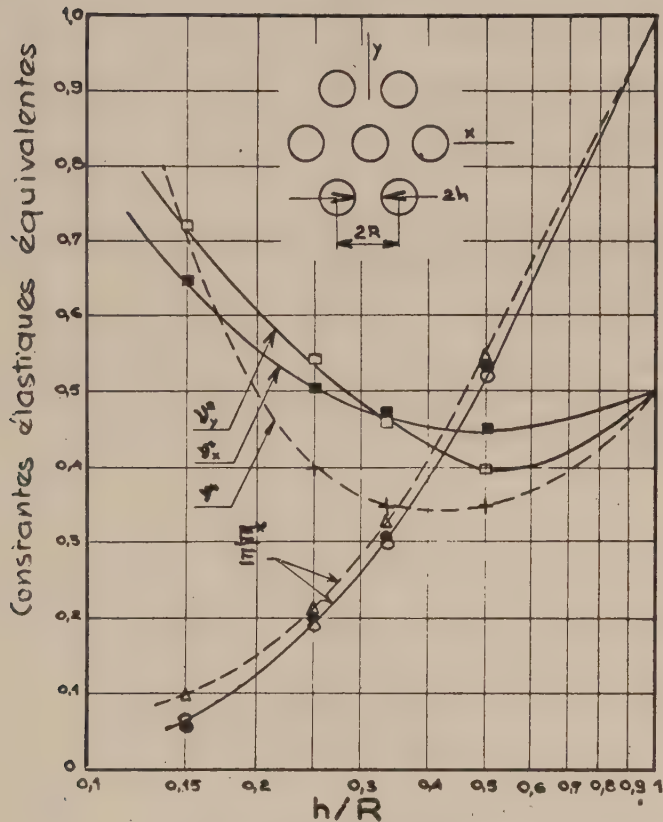
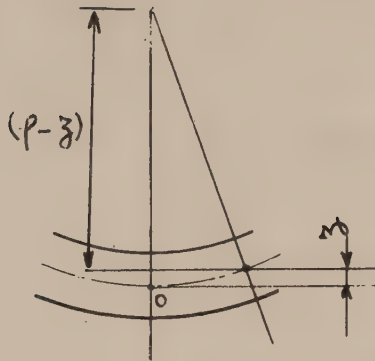


Fig. I-1,22-12.

Comparaison des constantes élastiques équivalentes de SAMPSON, obtenues en traction et en flexion ($\nu = 0,5$).

— traction
-- flexion ($H/R = 7$)

Les constantes élastiques équivalentes en traction sont indépendantes de l'épaisseur de la plaque. Mais ce n'est pas le cas en flexion. Pour montrer l'influence de l'épaisseur, l'auteur a étudié la variation de E^*/E et ν^* en fonction de H/R pour h/R donné.

Les constantes élastiques équivalentes pour les plaques relativement minces en flexion diffèrent notablement de celles obtenues en traction. Cependant, lorsque la plaque devient épaisse, les valeurs des constantes en flexion tendent vers celles obtenues en traction. Remarquons la brusque variation de

E^*/E et de ν^* au voisinage de $H/R = 4$. Cela peut être interprété comme le passage de la plaque mince à la plaque épaisse. Pour $H/R > 4$ ou ($H > 2$ pas), les constantes sont sensiblement identiques en flexion et en traction. (Fig. I-1,13 a et b). La rigidité correspondante D^*/D a été calculée. (Fig. I-1,22-14)

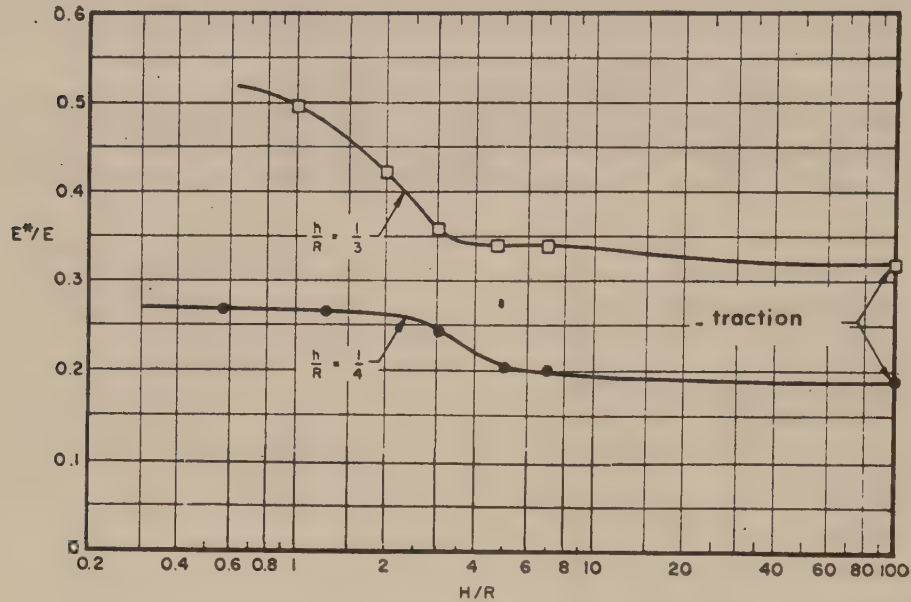


Fig. I-1,22-13 a. Variation de E^*/E avec l'épaisseur de la plaque en flexion ($\nu = 0,5$).

H : épaisseur de la plaque.

$2R$: pas triangulaire.

$2h$: largeur minimale du ligament.

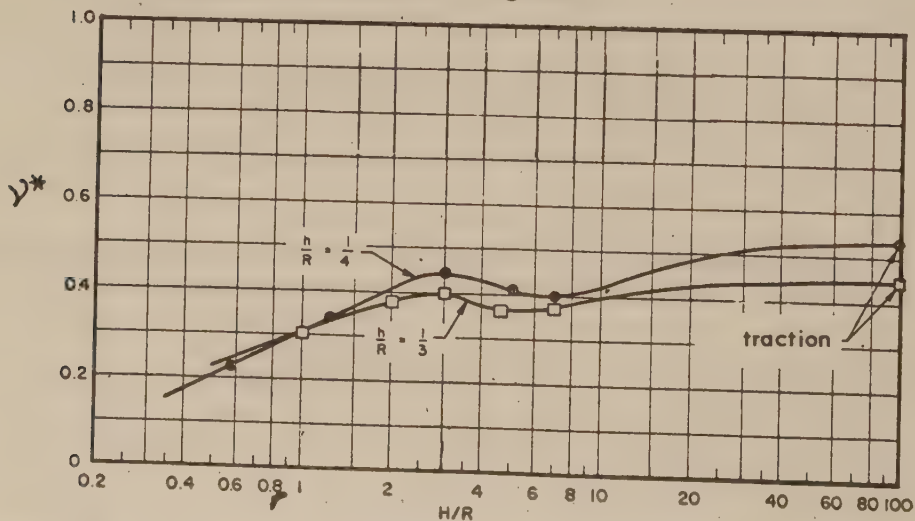


Fig. I-1,22-13 b. Variation du coefficient de POISSON ν^* avec l'épaisseur.

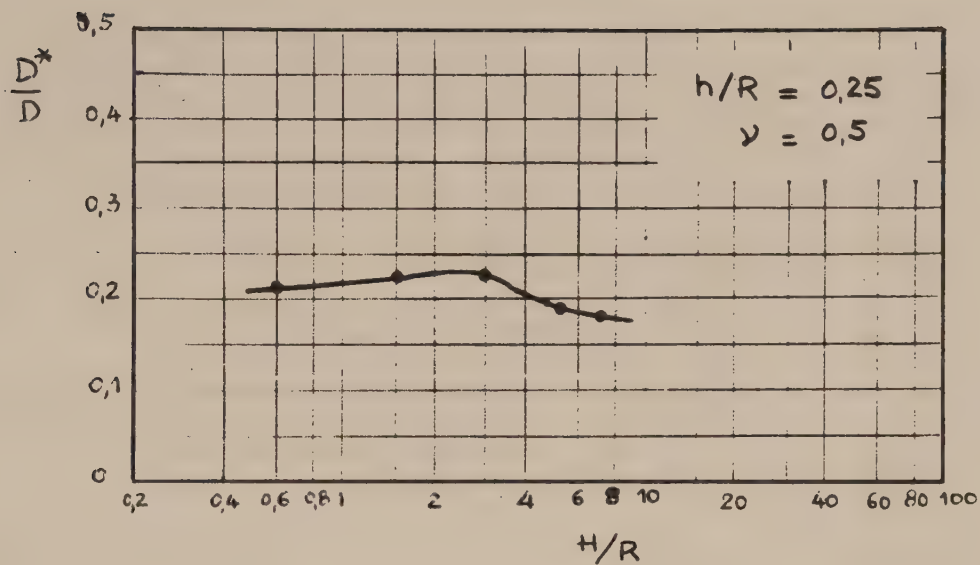
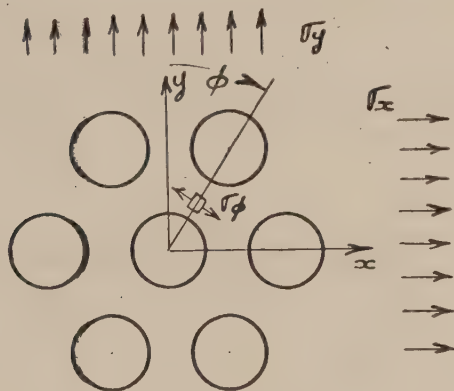


Fig. I-1,22-14. Influence de l'épaisseur sur la rigidité d'une barre percée en flexion pure.

Facteurs de majoration de contrainte de SAMPSON.

Les facteurs de majoration de contrainte ont été obtenus par analyse photoélastique. Pour cela, l'auteur a fait des essais en traction uniaxiale et a étudié la distribution de contrainte au bord des orifices. Cette étude a permis de déduire des résultats en contrainte biaxiale par superposition et ceci est possible, à cause de la symétrie de la figure et du chargement.



Il a noté ensuite les concentrations de contrainte pour différents chargements :

Uniaxiale : $\beta = 0$.

$$\sigma_x = \sigma_1 \quad \sigma_y = 0 \quad \phi = 0^\circ$$

Isotropique : $\beta = 1$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_1 \quad \phi = 30^\circ$$

Cisaillement pur : $\beta = -1$.

$$\sigma_x = -\sigma_y = \sigma_1 \quad \phi = 0^\circ$$

Les essais étant effectués pour plusieurs valeurs de h/R , ceux-ci permettent de tracer les courbes de la Fig. I-1,22-15.

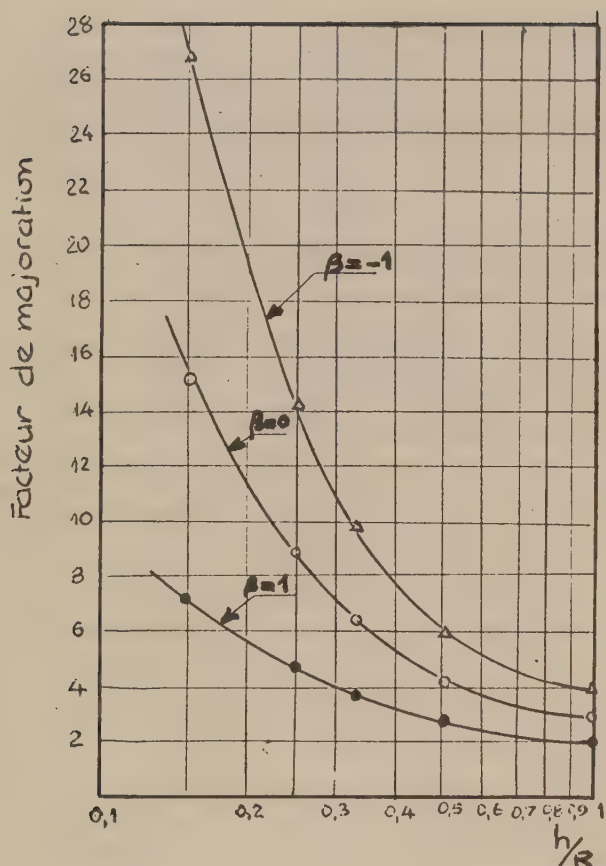


Fig. I-1,22-15.

Facteur de majoration de contrainte de SAMPSON en fonction de h/R , pour différents chargements.

I - 1,226 - Constantes de SAMPSON modifiées par O'DONNELL pour l'application pratique (1962) [15].

Les constantes élastiques équivalentes données par SAMPSON ne sont pas commodes pour l'application pratique, parce qu'elles varient avec la direction de chargement (x ou y) et avec la nature des sollicitations (flexion ou traction). En flexion, il faut encore distinguer les plaques minces des plaques épaisses. En outre, ces constantes ont été obtenues pour des plaques de coefficient de POISSON $\nu = 0,5$.

Comme nous avons vu précédemment, lorsque $H/R > 4$, les constantes élastiques équivalentes en flexion et en traction sont approximativement identiques. Or dans la pratique, c'est presque toujours le cas (plaque ayant une épaisseur supérieure au double du pas de perçage). On prendra donc les constantes en traction.

Le coefficient de POISSON ν^* varie avec la direction de chargement (ν_x^* et ν_y^*). On devra choisir les valeurs de ν^* qui représentent approximativement l'effet de POISSON dans toutes les directions. De toute manière, ce problème a peu d'importance, parce que la différence de ν_x^* et ν_y^* n'a pas une grande influence sur le calcul des contraintes.

SAMPSON a fait des essais sur du plastique de $\nu = 0,5$. Pour évaluer l'influence de ν sur les constantes élastiques équivalentes, il a déterminé celles-ci sur de l'aluminium ($\nu = 0,327$) en flexion pure. Les échantillons utilisés sont rangés dans la catégorie des "plaques épaisses" ($H/R = 7$). Donc les résultats sont valables pour $H/R > 4$, aussi bien en flexion qu'en traction.

Au cours de ces essais, on a constaté que :

1°/ E^*/E reste inchangé lorsque ν varie ,

2°/ ν^* dépend de ν du matériau donné et de ν_p^* et ν du plastique.

SAMPSON a établi une formule empirique donnant ν^* .

$$\nu^* = \nu_p^* \left[0,4343 \left(\frac{\nu_p}{\nu} - 1 \right) \left(\log \frac{h}{R} + 2,3026 \right) + 1 \right]^{-1} \dots (I-1,22-14)$$

où ν_p^* , ν_p : coefficients de POISSON du plastique ($\nu_p = 0,5$).

ν^* , ν : coefficients de POISSON du métal.

L'erreur maximale est de 7 % lorsqu'on applique cette formule au cas de l'aluminium.

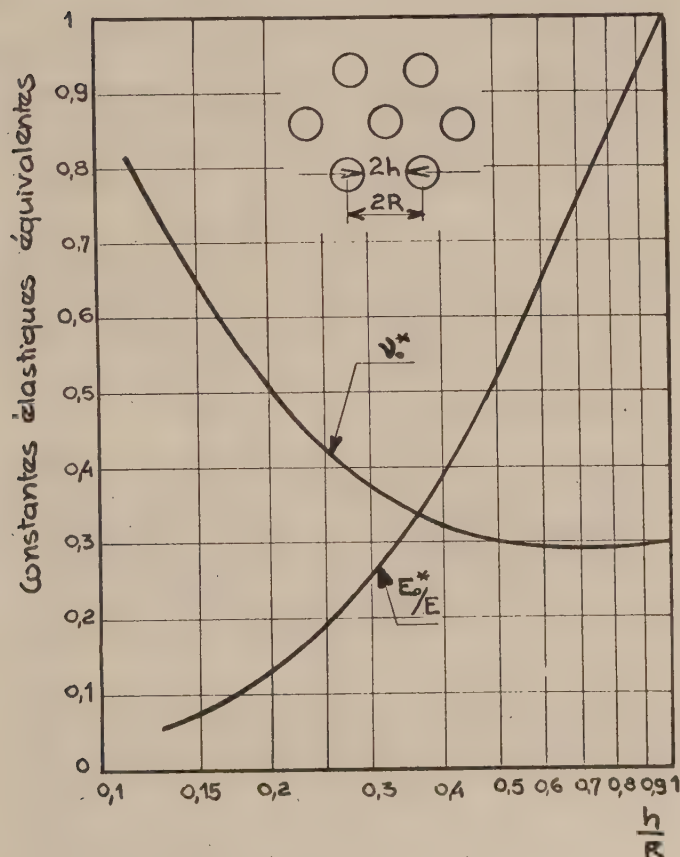


Fig. I-1,22-16.

Constantes élastiques équivalentes des plaques perforées de O'DONNELL valables pour $H/R > 4$.

(H : épaisseur de la plaque)

De toutes ces considérations, d'après O'DONNELL,

1°/ le rapport E^*/E peut être pris égal à celui de SAMPSON en traction.

2°/ le coefficient de POISSON ν^* est calculé avec la relation précédente pour le métal de $\nu = 0,3$.

Les résultats sont représentés à la Fig. I-1,22-16. La plus faible valeur de h/R essayée par SAMPSON étant égale à 0,15, on ne doit pas extrapoler au-delà de cette limite.

Quelles que soient la nature et la direction de chargement, et pour les plaques de $h/R > 4$, lorsqu'on utilise ces constantes modifiées par O'DONNELL au lieu de celles de SAMPSON, l'erreur est inférieure à 8 %.

I - 1,23 - Critiques et comparaisons.

Afin de comparer les différentes constantes élastiques équivalentes obtenues par divers auteurs, nous les représentons sur le même graphique (Fig. I-1,23-1).

Les courbes de E^*/E montrent que suivant les auteurs, les résultats varient du simple au double. Les valeurs de E_h^*/E de HORVAY obtenues en traction concordent avec celles de SAMPSON au voisinage de $h/R = 0,15$ (la théorie de HORVAY étant valable pour $h/R < 0,2$), mais divergent lorsque h/R augmente. Tandis que les valeurs de E_m^*/E de MALKIN coïncident avec celles de SAMPSON au voisinage de $h/R = 0,26$. Les valeurs de E_h^*/E de HORVAY sont nettement trop faibles.

Les mêmes dispersions se trouvent pour les courbes de ν^* où les valeurs de ν_h^* de HORVAY en flexion sont beaucoup trop grandes et celles de ν_m^* sont beaucoup trop faibles par rapport à celles obtenues par SAMPSON. Seules les valeurs ν_h^* de HORVAY en traction coïncident avec les résultats de SAMPSON. (Fig. I-1,23-2).

Les résultats sont donc très divergents.

Dans le but de vérifier la validité de ces résultats, LEVEN a déterminé expérimentalement par la technique du "figeage de contrainte", les contraintes et les flèches dans une plaque circulaire complètement percée, appuyée à la périphérie et chargée par une pression répartie [14]. Les contraintes et les flèches trouvées expérimentalement sont comparées avec celles calculées par différentes théories. On a trouvé que les contraintes de SAMPSON donnent des résultats les plus concordants avec l'expérience.

Mais l'expérience de LEVEN a été faite sur le cas particulier d'une maquette de plaque tubulaire en plastique ($\nu = 0,5$). On ne saurait conclure sur le cas réel où le matériau est en acier ($\nu = 0,3$).

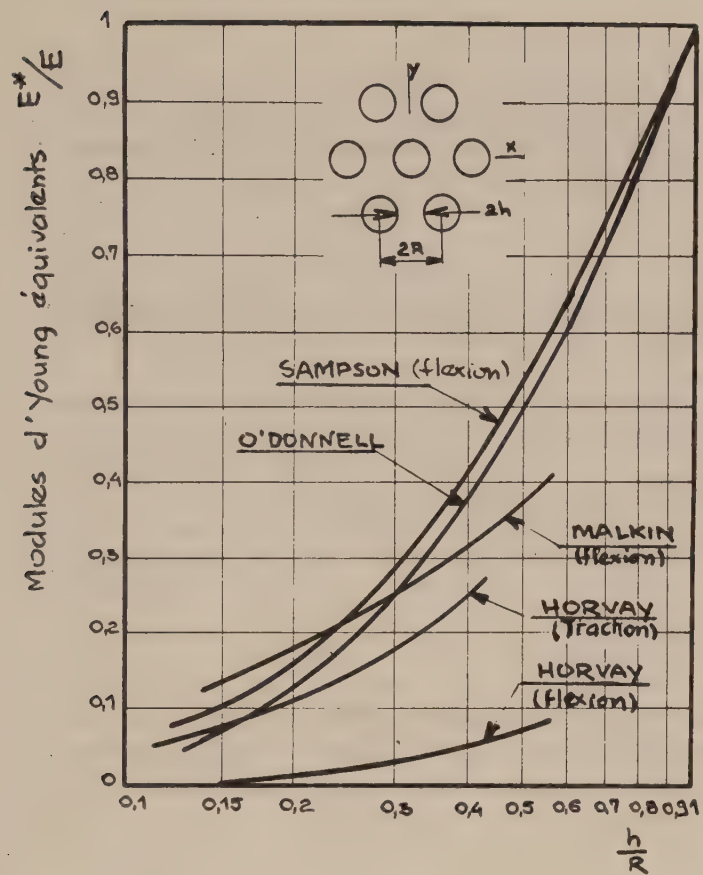


Fig. I-1,23-1.

Comparaison des modules d'YOUNG équivalents.

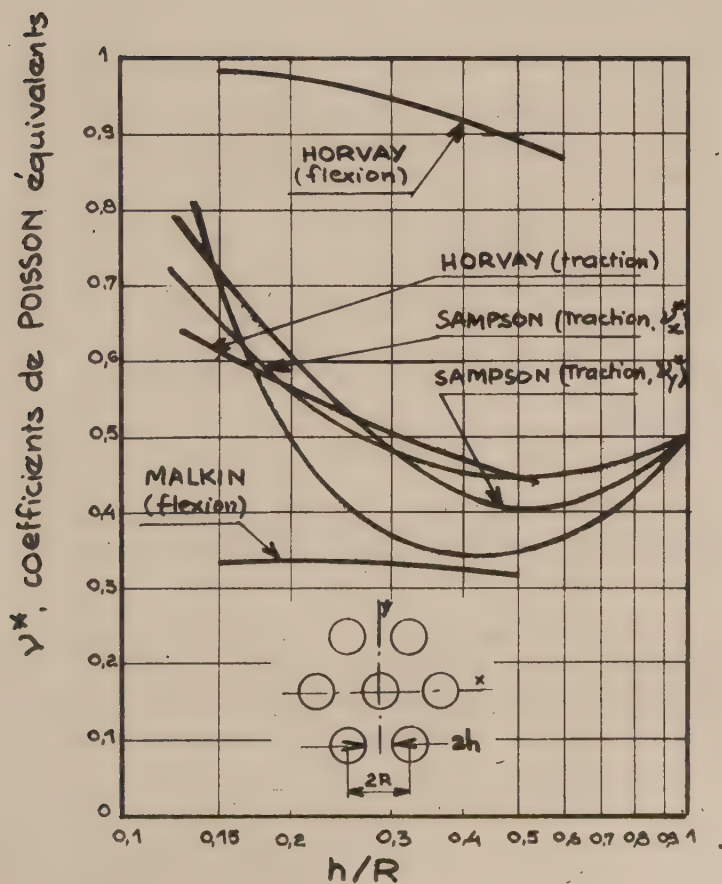


Fig. I-1,23-2.

Comparaison des coefficients de POISSON équivalents.

Dans nos prochains chapitres, nous allons déterminer E^* et ν^* sur des modèles en araldite ($\nu = 0,33$). Nous comparerons nos résultats avec ceux d'O'DONNELL, puis nous contrôlerons la validité de ces constantes élastiques équivalentes à l'aide d'un appareil expérimental conçu à cet effet.

I - 1,3. COMPARAISON ET DISCUSSION DES 2 METHODES DE CALCUL DES PLAQUES PERCEES.

Dans la méthode des coefficients de ligament et de déflexion, on a déterminé η_w et η_σ , tandis que dans la méthode des constantes élastiques équivalentes, on a cherché E^* , ν^* et Y (Y : facteur de majoration de contrainte).

Connaissant E^* , ν^* et Y , on peut calculer η_w et η_σ .

$$\text{En effet : } \eta_w = \frac{D^*}{D} = \frac{E^*(1-\nu^{*2})}{E(1-\nu^{*2})}$$

$$\text{et } \eta_\sigma = \frac{1}{Y}$$

Signalons cependant que dans la 2^e méthode, Y dépend en outre de la biaxialité. Le coefficient de POISSON équivalent est ν^* . Tandis que dans la 1^{ère} méthode, η_σ est supposé constant dans toute la plaque et le coefficient de POISSON de la plaque équivalente est pris égal à ν du matériau.

Nous avons donc :

Méthode des coefficients de ligament et de déflexion	Méthode des constantes élastiques équivalentes
$D^* = \eta_w D$	$D^* = \frac{E^* H^3}{12 (1-\nu^{*2})}$
$\nu^* = \nu$ du matériau.	ν^* des plaques perforées.
$Y = \frac{1}{\eta_\sigma} = \text{constante}$ pour h/R donné.	Y dépend en outre de β .

Dans la méthode des constantes élastiques équivalentes, on peut calculer les flèches, les contraintes radiales et tangentiels, lorsqu'on connaît E^* , ν^* et Y .

Les flèches ainsi calculées sont celles de la plaque perforée réelle.

Pour obtenir les contraintes radiales et tangentiels dans la plaque percée réelle, on doit multiplier celles calculées dans la plaque équivalente par Y .

Cette théorie n'est pas assez puissante pour permettre de calculer les contraintes en un point donné de la plaque percée. La plaque percée est remplacée par la plaque pleine équivalente avec des constantes E^* et ν^* et les contraintes sont calculées pour cette plaque équivalente. Comme conséquence de cette théorie, on peut calculer malencontreusement les contraintes en un point du trou ! Autrement dit, on ne peut pas choisir un point et espérer, par cette théorie, obtenir les contraintes en ce point. On ne peut pas non plus choisir plusieurs points d'un ligament et espérer, par cette théorie, obtenir la distribution de contraintes dans ce ligament. Mais ceci est peu gênant dans la pratique.

D'après HORVAY, les facteurs Y varient avec l'orientation des ligaments par rapport aux directions principales des contraintes dans la plaque équivalente. Les facteurs donnés sont valables pour les ligaments faisant 45° avec les directions principales, parce que HORVAY a trouvé qu'un tel ligament a la plus grande contrainte. Il est probable que pour les autres ligaments, les contraintes calculées avec ces facteurs Y sont plus grandes que les contraintes réelles.

SAMPSON a donné les facteurs Y correspondant à la concentration de contrainte au bord des trous. Il est donc évident que lorsqu'on colle les jauges sur un ligament pour mesurer la contrainte en un point de ce ligament, la contrainte mesurée est inférieure à celle calculée par l'utilisation de ces facteurs Y .

- 2. VERIFICATION DES THEORIES PRECEDENTES.

DETERMINATION EXPERIMENTALE DES CONSTANTES ELASTIQUES EQUIVALENTES.

SAMPSON a fait des mesures expérimentales des constantes élastiques équivalentes sur du matériau de coefficient de POISSON $\nu = 0,5$ (§ I-1,224). Il a ensuite évalué l'influence de ν sur les constantes élastiques en faisant des essais sur de l'aluminium ($\nu = 0,327$). Il en a déduit une formule caractérisant l'influence de ν sur ν^* . A partir de ces résultats, O'DONNELL a calculé les constantes élastiques équivalentes pour du matériau de $\nu = 0,3$ (Fig. I-1,22-16). Dans le présent paragraphe, nous rendons compte des mesures directes E^* et ν^* effectuées sur de l'araldite ($\nu = 0,33$), en vue de contrôler les résultats de O'DONNELL.

I- 2,1. PRINCIPE DE MESURE DES CONSTANTES ELASTIQUES EQUIVALENTES .

D'après l'expérience de SAMPSON (§ I-1,224), nous avons vu que le caractère anisotropique du quinconçage triangulaire est négligeable. Nous étudions donc seulement la traction dans la direction y.

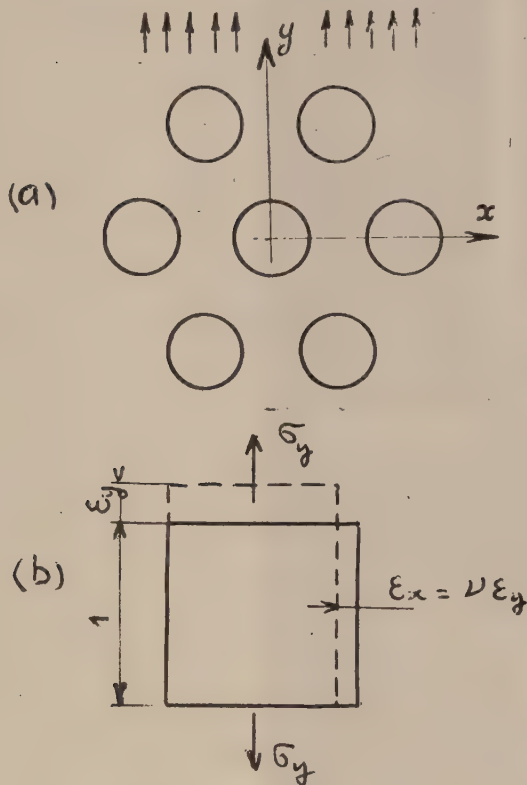


Fig. I-2,10-1.

La plaque percée est soumise à la traction simple. D'après la loi de HOOKE nous avons la relation :

$$\sigma_y = E^* \epsilon_y$$

$$\text{d'où } E^* = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y} \quad \dots(I-2,10-1)$$

dans laquelle $\sigma_y = F/S$, F étant la force de traction, S la section apparente de l'éprouvette et ϵ_y l'allongement unitaire dans la direction y. (Fig. I-2,10-1 a)

Le coefficient de POISSON équivalent est obtenu à partir de la définition. (Fig. I-2,10-1 b)

$$\nu^* = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} \quad \dots(I-2,10-2)$$

ϵ_x : allongement unitaire dans la direction x perpendiculaire à celle de la traction.

I - 2,2. MISE EN OEUVRE DE L'EXPERIENCE .

L'installation générale comprend:(Fig. I-1,20-1)

- des bandes percées de trous de différents diamètres,
- un appareil de traction,
- un extensomètre SOLEX permettant de mesurer les allongements.

I - 2,21 - Bandes perforées (Fig. I-2,21-1) .

Les modèles sont en araldite ($\nu = 0,33$). Les diverses dimensions sont données à la figure I-2,21-1. Chaque modèle comporte 15 rangées de trous dans le sens de la largeur. Les trous sont de diamètre :

$$2r = 10 - 13 - 15 - 17 \text{ mm}$$

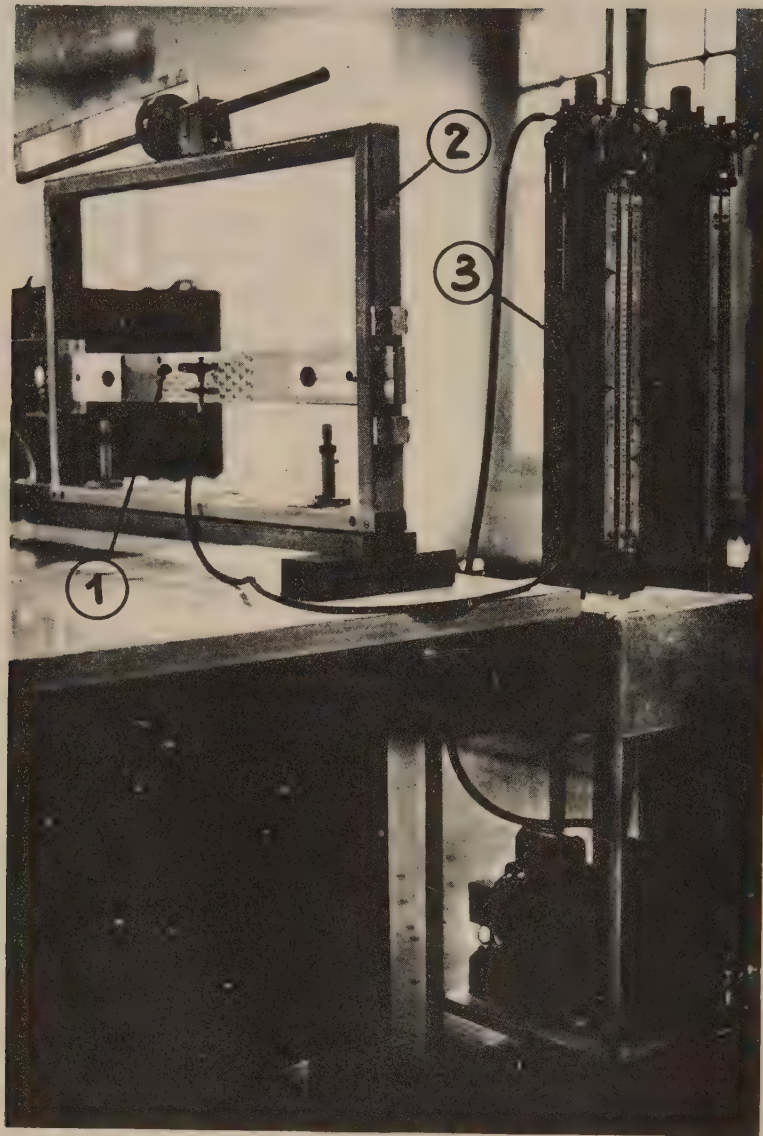


Fig. 1-2,20-1 - Installation générale pour la mesure des constantes élastiques équivalentes .

- (1)- Modèle .
- (2)- Appareil de traction .
- (3)- Extensomètre SOLAX .

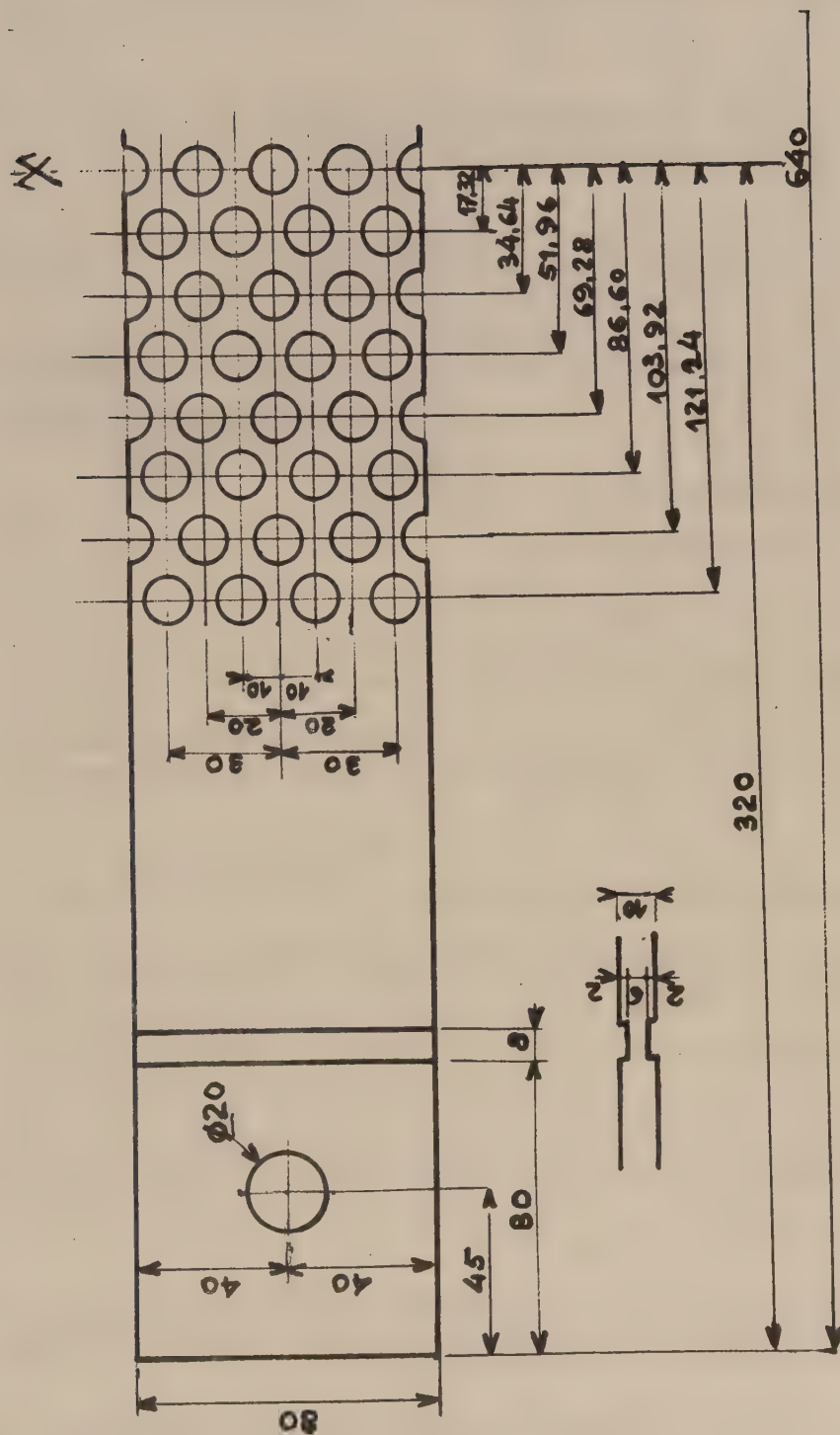


Fig. I-2,21-1 - Bande perforée de traction ($h/R = 0,35$).

Pas triangulaire : $2R = 20 \text{ mm}$
 Diamètre des trous : $2r = 13 \text{ mm}$
 Largeur minimale de lagament: $2h = 7 \text{ mm}$
 Epaisseur: $H = 10 \text{ mm}$

Le pas étant constant ($2R = 20 \text{ mm}$), on a respectivement :

$$h/R = 0,50 - 0,35 - 0,25 - 0,15.$$

Nous avons en outre une éprouvette de largeur 30 mm servant à déterminer E et ν du matériau ($h/R = 1$). Les autres dimensions sont identiques par ailleurs.

Chaque modèle possède 2 saignées dans lesquelles viennent se serrer les mors d'attache par l'intermédiaire de lames de caoutchouc. Ces précautions sont prises pour assurer la répartition de la charge sur toute la largeur.

La précision d'usinage des diamètres des trous et de leur entr'axe est de $0,02 \text{ mm}$.

I - 2,22 - Appareil de traction (Fig. I-2,20-1).

Il comprend essentiellement :

- 1 cadre très rigide,
- 2 mors d'attache du modèle.

La traction est obtenue par l'intermédiaire d'un dynamomètre TESWELL qui mesure la force de traction et dont la gamme de mesure est de 0 à $3\,000 \text{ N}$.

I - 2,23 - Extensomètre SOLEX (Fig. I-2,20-1).

C'est un extensomètre à amplification pneumatique type 25-60. Il comporte les éléments suivants :

- 1 extensomètre type 25-60 de longueur de base variable de 25 à 60 mm ,
- 1 micro-mesureur BP-SL (basse pression, simple lecture) de coefficient d'amplification maximale $7\,000$ et de capacité de mesure 100 microns ,
- 1 compresseur d'air.

L'élément essentiel de l'extensomètre 25-60 (Fig. I-2,23-1) est constitué par un amplificateur type 10 M qui fonctionne d'après le principe du "laminage indirect" rappelé brièvement ci-après :

Dans un corps cylindrique de l'amplificateur se trouve un obturateur (o) analogue à une soupape munie d'une longue tige (t) (Fig. I-2,23-2).

L'air venant d'un micro-mesureur par la canalisation (f) traverse l'obturateur et le débit sera plus ou moins important suivant le degré d'ouverture de l'obturateur.

Le manomètre de lecture (m) branché entre le gicleur de tête (G) et l'amplificateur (A) enregistre les variations de pression dues aux variations de débit d'air.

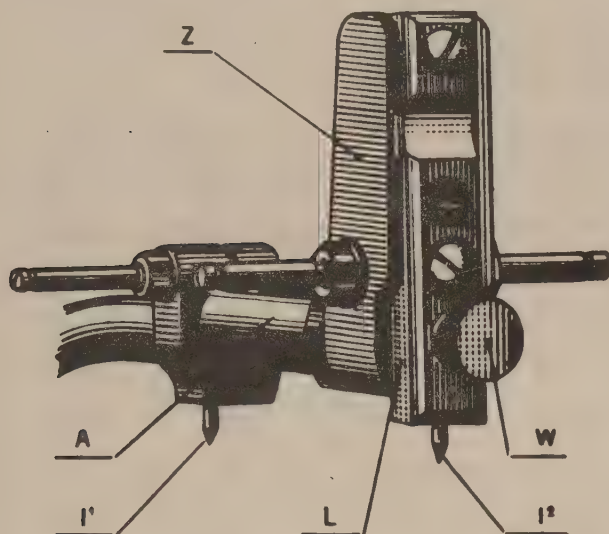


Fig. I-2,23-1. Extensomètre 25-60.
Schéma de fonctionnement.

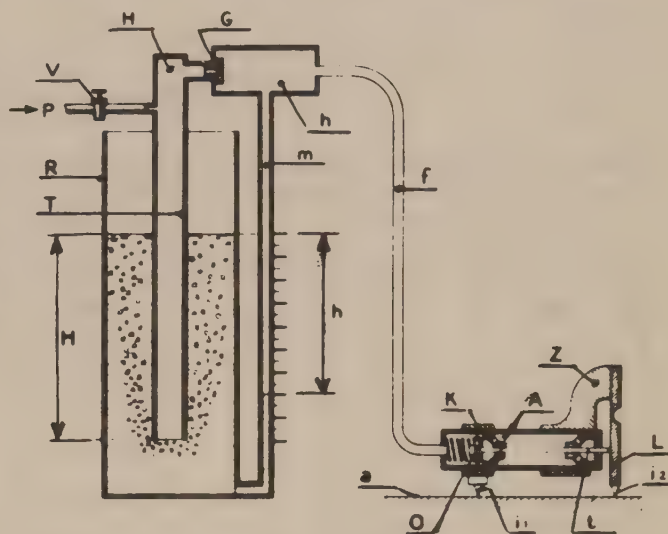


Fig. I-2,23-2. Extensomètre 25-60 seul.
A Amplificateur. W Vis de réglage.
i₁ et i₂ Pointes. Z Potence.
L lame élastique.

Les autres éléments de l'extensomètre ont pour but de transmettre à la tige de l'amplificateur les déformations de la base.

Le contact avec la surface de la pièce est assuré par 2 points (i₁) et (i₂). La première (i₁) est montée sur un collier (K) serré sur le corps de l'amplificateur. En déplaçant ce collier, on peut faire varier la distance entre les deux pointes, donc la longueur de base. L'autre pointe (i₂) est fixée à l'extrémité d'une lame flexible (L) supportée par une potence (Z) solidaire de l'amplificateur. La lame flexible (L) appuie sur la tige (t) de l'amplificateur. Grâce à l'élasticité de la lame, les 2 pointes peuvent se rapprocher ou s'éloigner. Ces déplacements sont immédiatement transmis à l'amplificateur par la lame flexible (L) toujours en contact avec la tige (t). Ce contact est assuré par un vis de réglage (W) qui sert à régler la hauteur d'eau initiale.

La fixation de l'extensomètre sur la bande perforée est assurée par 2 ressorts qui passent à travers les trous percés dans la plaque et qui sont accrochés aux axes prévus à cet effet sur l'extensomètre.

I - 2,3. MESURES EFFECTUEES ET RESULTATS .

Les éprouvettes étant soumises à des forces de traction variables, nous avons mesuré les allongements unitaires dans les directions x et y (y direction de traction) .

Soient X la longueur de base dans la direction x, et Y celle dans la direction y (Fig. I-2,10-1). Les divers résultats sont réunis dans les tableaux I-2,3-1.

Tableaux I-2,3-1.

$h/R = 1$ (plaque pleine) $X = 22 \text{ mm}$ $Y = 43 \text{ mm}$ $S = 30 \times 10 = 300 \text{ mm}^2$

F (N)	$\sigma_y = F/S$ (bars)	ΔX (microns)	$\epsilon_x = \Delta X/X$	ΔY (microns)	$\epsilon_y = \frac{\Delta Y}{Y}$	$E^* = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y}$ (hectobars)	$\nu^* = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}$
98	3,26	0,8	$0,364 \cdot 10^{-4}$	4,3	$1,00 \cdot 10^{-4}$	326	0,364
196	6,53	1,4	$0,635 \cdot 10^{-4}$	8,5	$1,97 \cdot 10^{-4}$	331	0,322
294	9,80	2,1	$0,955 \cdot 10^{-4}$	12,5	$2,91 \cdot 10^{-4}$	336	0,328
392	13,05	2,8	$1,270 \cdot 10^{-4}$	16,5	$3,84 \cdot 10^{-4}$	341	0,331
490	16,31	3,4	$1,545 \cdot 10^{-4}$	20,7	$4,81 \cdot 10^{-4}$	339	0,321
588	19,60	4,2	$1,910 \cdot 10^{-4}$	25,0	$5,81 \cdot 10^{-4}$	337	0,329
686	22,82	5,1	$2,310 \cdot 10^{-4}$	28,9	$6,72 \cdot 10^{-4}$	340	0,344
784	26,02	5,8	$2,640 \cdot 10^{-4}$	32,8	$7,62 \cdot 10^{-4}$	343	0,347

$h/R = 0,5$ $X = 40 \text{ mm}$ $Y = 40 \text{ mm}$ $S = 80 \times 10 = 800 \text{ mm}^2$

F (N)	$\sigma_y = F/S$ (bars)	ΔX (microns)	$\epsilon_x = \frac{\Delta X}{X}$	ΔY (microns)	$\epsilon_y = \frac{\Delta Y}{Y}$	$E^* = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y}$ (hectobars)	$\nu^* = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}$
98	1,22	0,9	$0,225 \cdot 10^{-4}$	2,9	$0,725 \cdot 10^{-4}$	168,5	0,322
196	2,45	1,7	$0,425 \cdot 10^{-4}$	5,6	$1,400 \cdot 10^{-4}$	175	0,330
294	3,67	2,6	$0,650 \cdot 10^{-4}$	8,0	$2,000 \cdot 10^{-4}$	183,5	0,325
392	4,90	3,5	$0,875 \cdot 10^{-4}$	10,8	$2,700 \cdot 10^{-4}$	181	0,324
490	6,12	4,5	$1,125 \cdot 10^{-4}$	13,5	$3,375 \cdot 10^{-4}$	181	0,334
588	7,35	5,5	$1,375 \cdot 10^{-4}$	16,1	$4,025 \cdot 10^{-4}$	182	0,342
686	8,57	6,3	$1,575 \cdot 10^{-4}$	18,9	$4,725 \cdot 10^{-4}$	181	0,334

$$h/R = 0,35 \quad X = 40 \text{ mm} \quad Y = 40 \text{ mm} \quad S = 80 \times 10 = 800 \text{ mm}^2$$

F (Newtons)	$\sigma_y = F/S$ (bars)	ΔX (microns)	$\epsilon_x = \frac{\Delta X}{X}$	ΔY (microns)	$\epsilon_y = \frac{\Delta Y}{Y}$	$E^* = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y}$ (hectobars)	$\nu^* = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}$
98	1,22	1,7	$0,425 \cdot 10^{-4}$	4,4	$1,100 \cdot 10^{-4}$	111	0,386
196	2,45	3,4	$0,850 \cdot 10^{-4}$	9,1	$2,275 \cdot 10^{-4}$	108	0,314
294	3,67	5,1	$1,275 \cdot 10^{-4}$	13,6	$3,400 \cdot 10^{-4}$	108	0,376
392	4,90	6,8	$1,700 \cdot 10^{-4}$	18,0	$4,500 \cdot 10^{-4}$	109	0,378
490	6,12	8,5	$2,125 \cdot 10^{-4}$	22,4	$5,585 \cdot 10^{-4}$	110	0,381
588	7,35	10,1	$2,525 \cdot 10^{-4}$	27,0	$6,550 \cdot 10^{-4}$	109	0,374
686	8,57	11,8	$2,950 \cdot 10^{-4}$	31,2	$7,800 \cdot 10^{-4}$	110	0,378

$$h/R = 0,25 \quad X = 40 \text{ mm} \quad Y = 40 \text{ mm} \quad S = 80 \times 10 = 800 \text{ mm}^2$$

F (Newtons)	$\sigma_y = F/S$ (bars)	ΔX (microns)	$\epsilon_x = \frac{\Delta X}{X}$	ΔY (microns)	$\epsilon_y = \frac{\Delta Y}{Y}$	$E^* = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y}$ (hectobars)	$\nu^* = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}$
98	1,22	3,3	$0,825 \cdot 10^{-4}$	7,3	$1,825 \cdot 10^{-4}$	67,0	0,450
196	2,45	6,4	$1,600 \cdot 10^{-4}$	14,8	$3,700 \cdot 10^{-4}$	66,2	0,432
294	3,67	9,5	$2,375 \cdot 10^{-4}$	21,7	$5,425 \cdot 10^{-4}$	67,6	0,437
392	4,90	12,7	$3,175 \cdot 10^{-4}$	28,3	$7,075 \cdot 10^{-4}$	69,0	0,450
490	6,12	15,9	$3,975 \cdot 10^{-4}$	35,8	$8,950 \cdot 10^{-4}$	68,6	0,445

$$h/R = 0,15 \quad X = 19 \text{ mm} \quad Y = 40 \text{ mm} \quad S = 60 \times 10 = 600 \text{ mm}^2$$

F (Newtons)	$\sigma_y = F/S$ (bars)	ΔX (microns)	$\epsilon_x = \frac{\Delta X}{X}$	ΔY (microns)	$\epsilon_y = \frac{\Delta Y}{Y}$	$E^* = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y}$ (hectobars)	$\nu^* = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}$
49	0,82	2,9	$1,53 \cdot 10^{-4}$	11,5	$2,88 \cdot 10^{-4}$	28,4	0,530
98	1,63	6,4	$3,37 \cdot 10^{-4}$	23,0	$5,75 \cdot 10^{-4}$	28,4	0,585
147	2,45	10,1	$5,31 \cdot 10^{-4}$	35,0	$8,75 \cdot 10^{-4}$	28,0	0,606
196	3,26	14,1	$7,42 \cdot 10^{-4}$	48,0	$12,00 \cdot 10^{-4}$	27,2	0,618
245	4,07	17,7	$9,32 \cdot 10^{-4}$	60,0	$15,00 \cdot 10^{-4}$	27,2	0,620
294	4,90	21,0	$11,05 \cdot 10^{-4}$	72,5	$18,13 \cdot 10^{-4}$	27,0	0,610
343	5,71	25,0	$13,16 \cdot 10^{-4}$	85,5	$21,38 \cdot 10^{-4}$	27,0	0,615
490	6,52	28,5	$15,00 \cdot 10^{-4}$	98,0	$24,50 \cdot 10^{-4}$	26,6	0,612

Les valeurs des constantes élastiques équivalentes moyennes sont calculées pour différentes valeurs de h/R et sont données dans le tableau I-2,3-2. Dans ce même tableau, nous avons donné les valeurs de ν^* corrigé pour la valeur de $\nu = 0,3$ d'après la formule I-1,22-14.

Tableau I-2,3-2.

$\frac{h}{R}$	E^* (hectobars)	ν^* araldite	$\frac{E^*}{E}$	ν^*
1	336	0,332	1	0,300
0,50	178,5	0,330	0,530	0,306
0,35	109	0,378	0,323	0,357
0,25	67,6	0,443	0,201	0,424
0,15	27,4	0,610	0,082	0,598

Les courbes de E^*/E et ν^* sont représentées à la figure I-2,3-3.

I - 2,4. CALCULS D'ERREUR. VERIFICATION DES MESURES EFFECTUEES.

L'erreur sur les valeurs des constantes élastiques équivalentes mesurées est due principalement à la mesure des forces et des allongements. En effet, on a :

$$E^* = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y} = \frac{F}{S} \cdot \frac{Y}{\Delta Y}$$

L'erreur relative sur E^* est :

$$\frac{\Delta E^*}{E^*} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta(\Delta Y)}{\Delta Y}$$

La force moyenne dans ces essais est $F = 300$ N, ce qui correspond à 48 divisions sur le dynamomètre. Nous avons pu apprécier le 1/4 de division sur le dynamomètre. L'erreur absolue sur la force lue est :

$$F = \frac{300}{4 \times 48} = 1,56 \text{ N}$$

d'où
$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{1,56}{300} = 0,52 \cdot 10^{-2}$$

L'erreur maximale sur les dimensions des éprouvettes est de :

$$\Delta L = 0,1 \text{ mm}$$

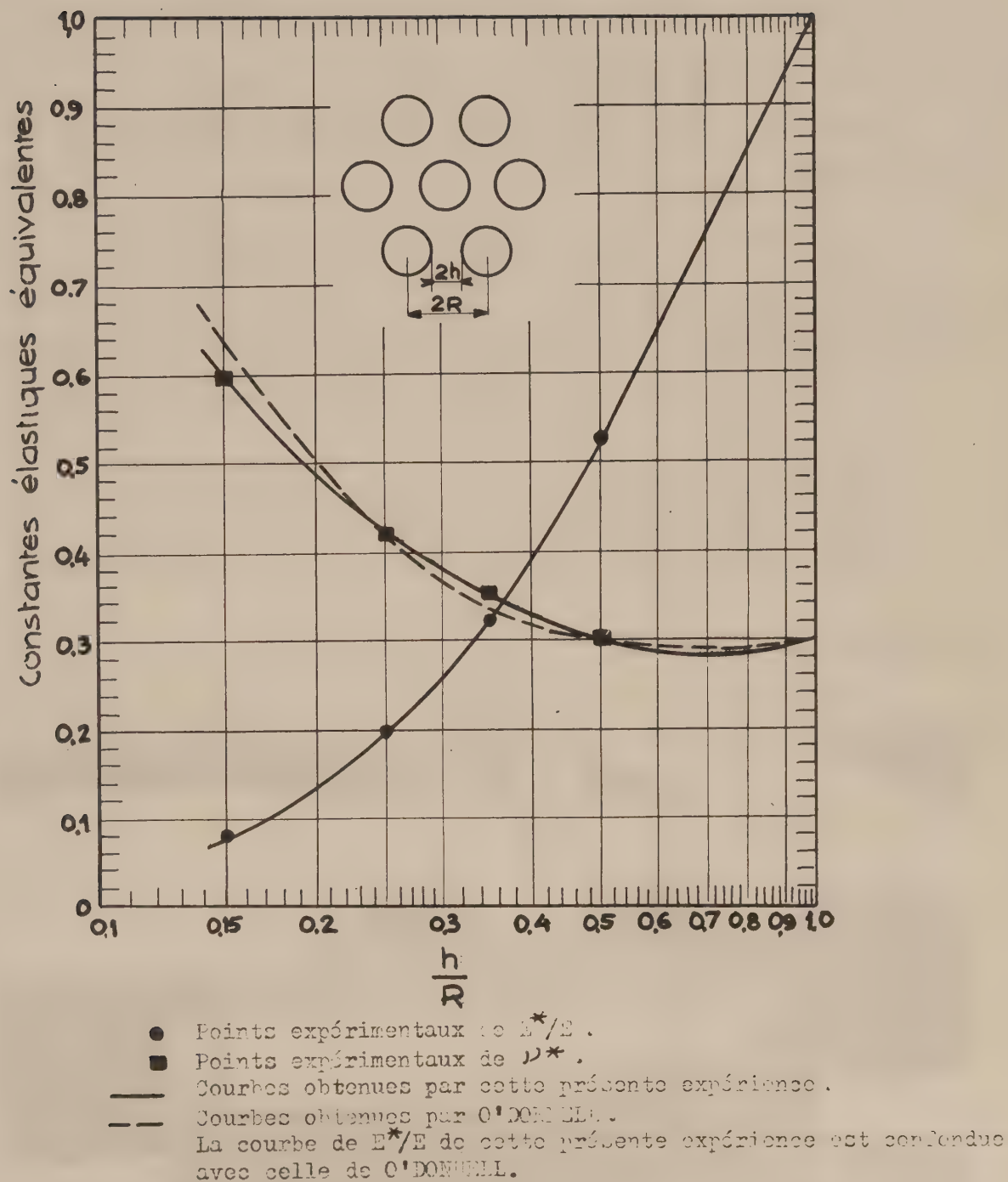


Fig. I-2,3-3. Constantes élastiques équivalentes en fonction de h/R .

d'où $\Delta S = 2 \Delta l = 0,2 \text{ mm}$

et $\frac{\Delta S}{S} = \frac{0,2}{800} = 0,025 \cdot 10^{-2}$

La base de lecture peut être réglée à 0,1 mm près,

d'où $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{0,1}{40} = 0,25 \cdot 10^{-2}$

L'extensomètre SOTEX peut donner le 1/10 de micron, ce qui donne :

$$\frac{\Delta(\Delta Y)}{\Delta Y} = \frac{0,1}{20} = 0,5 \cdot 10^{-2}$$

Finalement :

$$\frac{\Delta E^*}{E^*} = 0,52 \cdot 10^{-2} + 0,025 \cdot 10^{-2} + 0,25 \cdot 10^{-2} + 0,5 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{\Delta E^*}{E^*} = 1,295 \cdot 10^{-2} < 1,3 \%$$

L'erreur sur la mesure de ν^* est, d'après la formule :

$$\nu^* = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}$$

$$\frac{\Delta \nu^*}{\nu^*} = 2 \frac{\Delta \varepsilon_y}{\varepsilon_y} = 2 \left[\frac{\Delta(\Delta y)}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{y} \right] = 2 (0,5 \cdot 10^{-2} + 0,25 \cdot 10^{-2})$$

$$\frac{\Delta \nu^*}{\nu^*} = 1,5 \cdot 10^{-2} < 1,5 \%$$

Vérification de la mesure de E.

On peut vérifier la mesure de E par le dispositif d'étalonnage avec l'étrier de mesure de module d'YOUNG E, construit par TESWELL. (Fig. I-2,4-1)

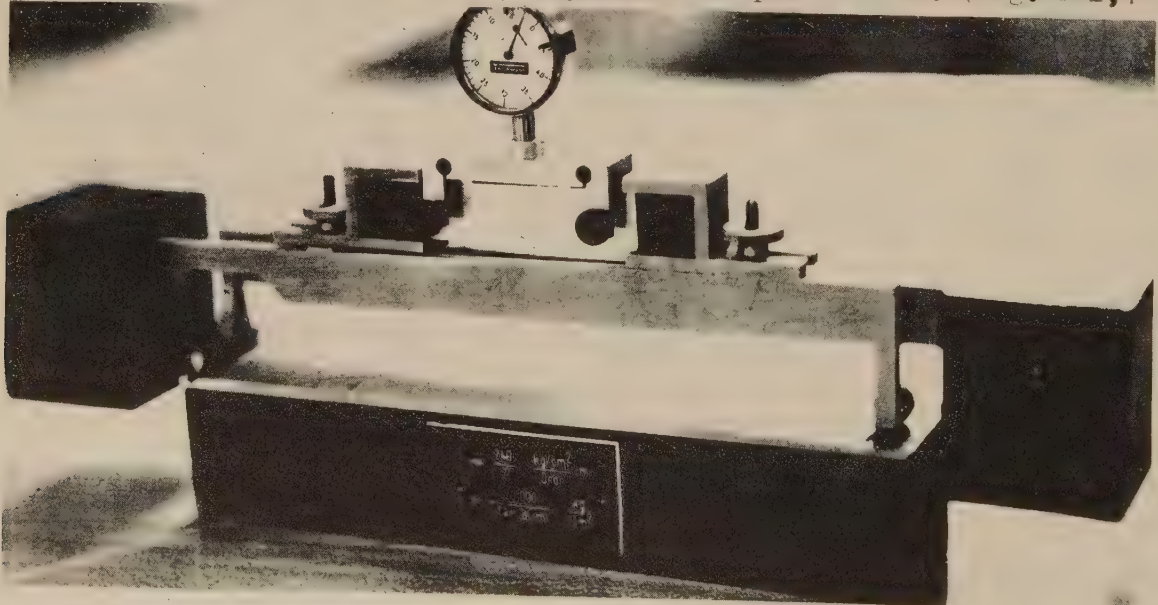


Fig. I-2,4-1. Dispositif de mesure de module d'YOUNG.

L'échantillon de dimension 120 x 20 x 20 est soumis à une flexion pure. La mesure de la flèche au milieu a permis d'en déduire le module d'YOUNG E.

La formule établie par le constructeur est :

$$E = \frac{520\ 000}{y \times H} \quad \text{kg/cm}^2$$

où y : différence d'indication du comparateur en division d'échelle entre l'état chargé et non chargé
H : épaisseur du barreau-étalon en cm.

La mesure donne y = 15, d'où

$$E = \frac{520\ 000}{15 \times 1} = 347.10^2 \quad \text{kg/cm}^2 \quad \text{soit}$$

E = 340 hectobars, résultat à comparer aux 336 hectobars trouvés pour la plaque pleine par les mesures extensométriques (tableau I-2,3-2) .

I - 2,5. CONCLUSION .

La précision de nos mesures est considérée comme très bonne.

Nos résultats expérimentaux concordent avec ceux d'O'DONNELL.

I - 3. CONTRAINTE DANS UNE PLAQUE PERCEE
DE NOMBREUX TROUS.

VERIFICATION DES RESULTATS DE SAMPSON.

L'étude de SAMPSON [12], a été effectuée en "figeage de contrainte" sur du plastique de $\nu = 0,5$.

Nous avons repris ces expériences en étudiant par photoélasticité, les contraintes dans les éléments de plaques perforées déjà utilisés dans l'étude des constantes élastiques équivalentes dont il a été rendu compte au § I-2. Le coefficient de POISSON du matériau de ces dernières plaques a pour valeur $\nu = 0,33$.

I - 3,1. CONTRAINTES DANS UNE PLAQUE PERCEE DE NOMBREUX TROUS .

Dans le calcul des contraintes dans une plaque percée de nombreux trous, il faut distinguer les contraintes moyennes et les concentrations de contrainte.

Les contraintes moyennes indiquent les charges subies par l'ensemble de la structure, tandis que les concentrations de contrainte reflètent plutôt la distribution de contrainte locale, toujours susceptible d'être modifiée par les phénomènes d'adaptation.

On limite sévèrement les contraintes moyennes, tandis que les concentrations de contrainte ne sont dangereuses que lorsque les charges sont répétées pouvant provoquer des phénomènes de fatigue.

Limites des contraintes pour les capacités sous-pression .

Différentes théories ont été avancées pour résoudre le problème dans le cas général. La plupart admettent que la limite élastique est atteinte, quand une certaine fonction des contraintes principales est égale à la limite élastique du matériau en traction simple :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_0 \quad \dots(I-3,1-1)$$

où σ_0 : limite élastique .
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: contraintes principales .

La validité des divers critères a été discutée par TARDY dans la référence [39].

Le code ASME (American Society of Mechanical Engineers) préconise l'utilisation du critère de cisaillement maximum. L'équation (I-3,1-1) s'écrit :

$$\sigma_0 = [\sigma_i - \sigma_j]_{\max} \quad \dots(I-3,1-2)$$

Pour que l'on puisse faire une comparaison des valeurs des contraintes de cisaillement avec celles des contraintes en traction simple, les contraintes calculées sont prises égales à 2 fois la contrainte de cisaillement maximum, qui est la plus grande différence algébrique de 2 des 3 contraintes principales. Cette quantité est appelée "Intensité de contrainte équivalente".

Le code ASME distingue 3 sortes de contraintes :

1 - Intensité de contrainte équivalente basée sur les contraintes moyennes le long de la section minimale de ligament et à travers l'épaisseur : S_{eff} .

Cette contrainte est analogue à la contrainte moyenne de la coque d'une capacité sous-pression. Par conséquent, elle doit être limitée à la valeur prescrite par le code ASME. Dans ce code, la contrainte permise ne doit pas dépasser 2/3 de la limite élastique pour les métaux ferreux et non ferreux. Cette contrainte permise est appelée S_m . La limite de cette contrainte équivalente est :

$$S_{eff} = S_m \quad \dots(I-3,1-3)$$

2 - Intensité de contrainte équivalente basée sur les contraintes moyennes le long de la section minimale de ligament, mais pas à travers l'épaisseur σ_{eq} .

C'est la somme de la contrainte de membrane agissant dans le plan de la plaque et de la contrainte de flexion maximale à la surface. On la limite à :

$$\sigma_{eq} = 1,5 \sigma_m \quad \dots (I-3,1-4)$$

3 - Concentration de contrainte : σ_{max} .

La concentration de contrainte au bord des trous produit des contraintes maximales, analogues à la contrainte maximale au bord du trou dans une plaque infinie, lorsque celle-ci est soumise à une tension uniaxiale.

Cette contrainte maximale n'est pas limitée, sauf dans le cas des charges répétées.

I - 3,2. ETUDE EXPERIMENTALE PERSONNELLE DE LA DISTRIBUTION DE CONTRAINTE A L'INTERIEUR DES LIGAMENTS D'UNE BANDE PERFOREE SOUMISE A LA TRACTION SIMPLE PAR LA METHODE PHOTOELASTIQUE.

Afin d'étudier ultérieurement l'influence théorique des contraintes induites sur l'état de contrainte en un point d'une bande perforée en traction simple, nous étudions d'abord expérimentalement la distribution de contrainte dans la section minimale de ligament.

I - 3,21 - Description de l'installation.

L'installation générale comporte les éléments suivants :

- 1 - des modèles ,
- 2 - un appareil de traction ,
- 3 - un banc photoélastique .

I - 3,211 - Modèles (Fig. I-2,21-1)

Ce sont les mêmes que précédemment utilisés pour déterminer les constantes élastiques équivalentes (§ I-2,21). L'araldite est une matière biréfringente, ce qui permet l'étude photoélastique. ($\nu = 0,33$)

I - 3,212 - Appareil de traction.

Déjà décrit au paragraphe I-2,22.

I - 3,213 - Banc photoélastique (Fig. I-3,21-1) .

Le champ de vision est de 460 mm de diamètre.

Il comprend essentiellement :

- une source lumineuse qui se compose de 2 lampes à vapeur de sodium (PHILIPS SO 140) et de 5 lampes à incandescence 100 W/235 V,
- des filtres polariseur et analyseur. Chacun est constitué d'un filtre polarisant et d'une lame quart-d'onde incorporée,
- un axe d'insertion permettant de tourner les 2 filtres ensemble,
- une plaque d'assise qui sert à installer les filtres. Ceux-ci sont automatiquement parallèles.

I - 3,22 - Essais effectués.

Pour une analyse quantitative de contrainte, il est nécessaire de connaître la valeur de frange du matériau utilisé.

Détermination de la valeur de frange f de l'araldite :

Un dispositif d'étalonnage permet de déterminer la valeur de frange f (Fig. I-3,22-1). Ce dispositif charge le barreau étalon avec un moment de flexion sans effort transversal et sans torsion. Ce barreau a la même dimension en mm 120 x 20 x 10. Il est pris dans la même plaque que la bande perforée.



Fig. I - 3,21-1. Installation générale pour l'analyse de contrainte d'une bande perforée soumise à la traction simple.

(1) Modèle (2) Appareil de traction (3) Appareil photoélasticité

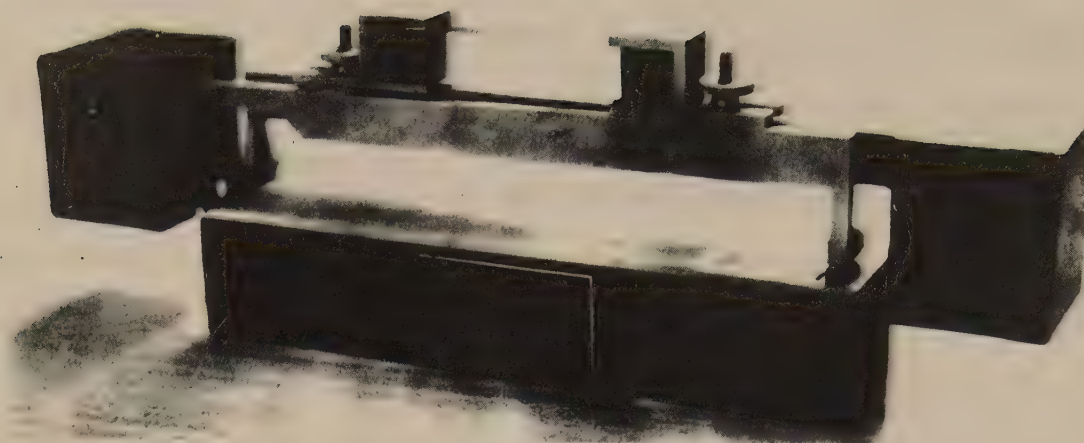


Fig. I-3,22-1. Dispositif d'étalonnage.

Le barreau est soumis à une flexion pure du moment 80 cm kg. La contrainte de la fibre la plus éloignée est :

$$\sigma = \frac{M}{I/v}$$

Pour une section rectangulaire de hauteur $h = 20$ mm, et de largeur $H = 10$ mm, on a :

$$\frac{I}{v} = \frac{Hh^2}{6} = \frac{10 \times (20)^2}{6} = \frac{2}{3} \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\text{d'où } \sigma = \frac{8 \cdot 10^2}{\frac{2}{3} \cdot 10^3} = 1,20 \text{ kg/mm}^2 \text{ soit } 1,18 \text{ hectobars.}$$

La valeur de frange est :

$$f = \frac{2,36}{\sigma} \text{ en hectobars / frange pour une plaque de } 10 \text{ mm d'épaisseur}$$

où z : nombre d'espaces intermédiaires d'isochromes comptés sur toute la hauteur du barreau en évaluant les fractions au bord.

Nous avons trouvé $z = 22$, d'où :

$$f = \frac{2,36}{22} = 0,107 \text{ hectobars / frange pour } 10 \text{ mm d'épaisseur.}$$

Traction de l'éprouvette.

Connaissant la valeur de frange et la section de l'éprouvette, on peut déterminer la force nécessaire pour qu'il y ait 2 franges dans la partie pleine.

La valeur de frange pour une plaque de 10 mm d'épaisseur est :
 $f = 0,107$ hectobars / frange. Si F est la force nécessaire de traction pour avoir une frange, on a :

$$F/S = F/800 = 0,107 \text{ hectobars, d'où :}$$

$$F = 853 \text{ N.}$$

La courbe d'étalonnage du dynamomètre donne 139 divisions pour 853 N. Lorsqu'on tire avec une force de 1 706 N (218 divisions), on a 2 franges dans la partie pleine. Ceci correspond à la contrainte nominale de traction.

I - 3,23 - Analyse quantitative de la contrainte le long de la section minimale de ligament AB.

L'éprouvette est soumise à la traction comme décrit précédemment. Afin de pouvoir faire une analyse quantitative de contrainte, il est nécessaire de déterminer au préalable les réseaux d'isochromes, d'isostatiques et d'isoclines.

Les isochromes

L'isochrome est le lieu des points de même couleur, donc de même retard optique. Comme le retard optique est proportionnel à la différence de contraintes principales en ce point, le long de ces lignes la différence de contraintes principales a une valeur constante. Pour les observer, on supprime les isoclines en mettant les 2 lames quart-d'onde dans le champ de la lumière. Nous obtenons ainsi un réseau d'isochromes (Fig. I-3,23-1).

Les isoclines

L'isocline est le lieu des points où les directions principales sont parallèles à 2 directions orthogonales données.

Pour les observer, on enlève les 2 lames quart-d'onde en les mettant hors du champ de la lumière. Nous pouvons ainsi tracer les isoclines de 10° en 10° (Fig. I-3,23-2).

Les isostatiques

L'isostatique est une courbe telle qu'en chacun de ses points, l'une des directions principales est tangente à la courbe en ce point.

A partir des isoclines, on peut donc tracer 2 réseaux d'isostatiques orthogonaux (Fig. I-3,23-3).

Les isostatiques donnent une idée du cheminement des contraintes.

Séparation de contraintes par la méthode de FROCHT [30]

Dans la section de symétrie AB, il n'y a pas de cisaillement. Le plan AB et ses perpendiculaires sont des plans principaux. Donc AB est une isostatique.

Lorsqu'une isostatique est également axe de symétrie, il est intéressant d'utiliser la méthode de FROCHT pour séparer les contraintes principales.

Appelons S_1 l'isostatique AB, et S_2 les isostatiques qui lui sont orthogonales, les contraintes σ_1 sont parallèles à AB, et les contraintes σ_2 sont perpendiculaires à AB (Fig. I-3,23-3).

L'inspection des isoclines et des isostatiques montre qu'une isocline zéro coupe l'isostatique AB en M, milieu de AB (symétrie) (Fig. I-3,23-3). Le point M est le point "cupique" ([30] p. 222). Il doit toujours avoir un tel point sur une isostatique qui relie 2 points d'un contour libre ; la contrainte

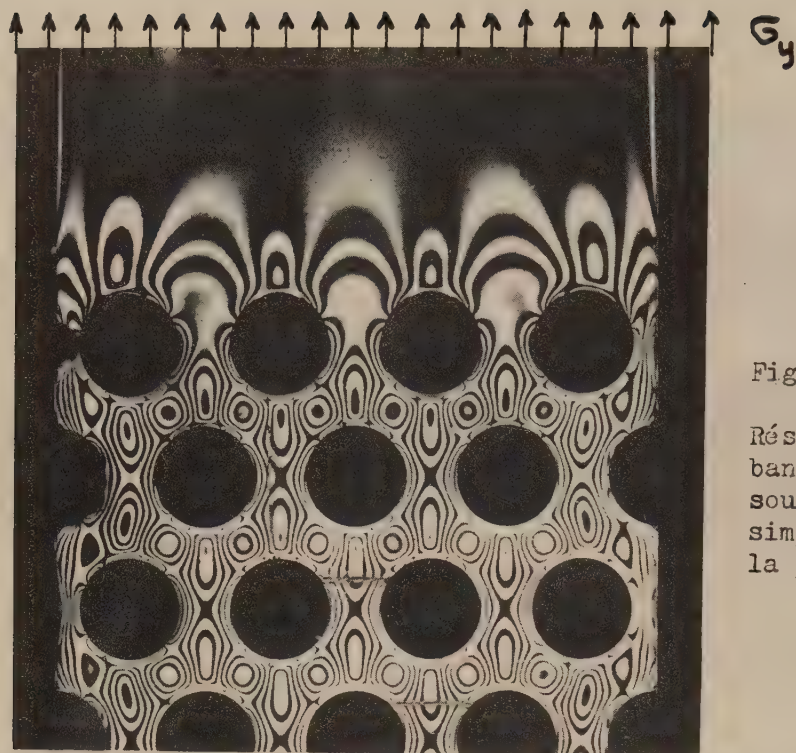


Fig. I-3,23-1.

Réseau d'isochromes de la bande perforée ($h/R = 0,35$) soumise à la traction simple avec 2 franges dans la partie pleine.

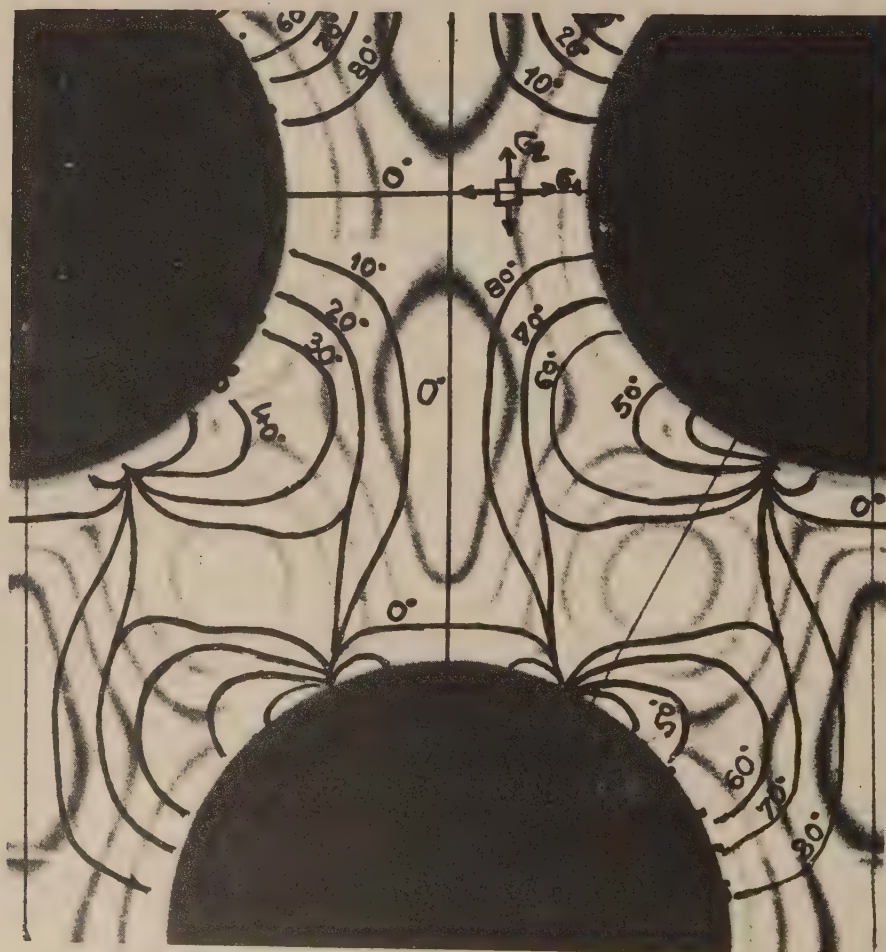


Fig. I-3,23-2.

Réseau d'isoclines de la bande perforée ($h/R = 0,35$) soumise à la traction simple avec 2 franges dans la partie pleine.

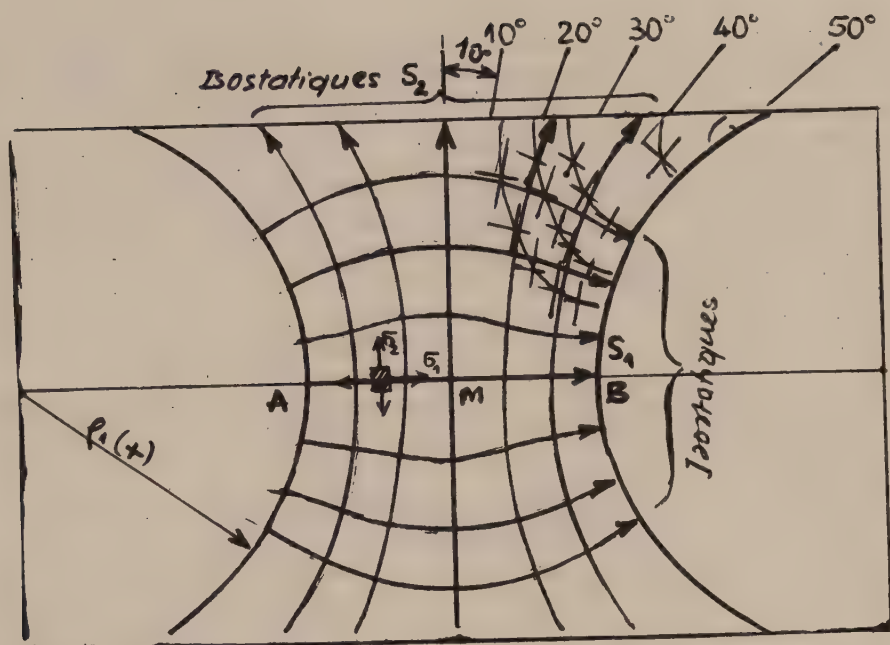


Fig. I-3,23-3. Tracé du réseau d'isostatiques à partir du réseau d'isoclines de la Fig. I-2,22-5.

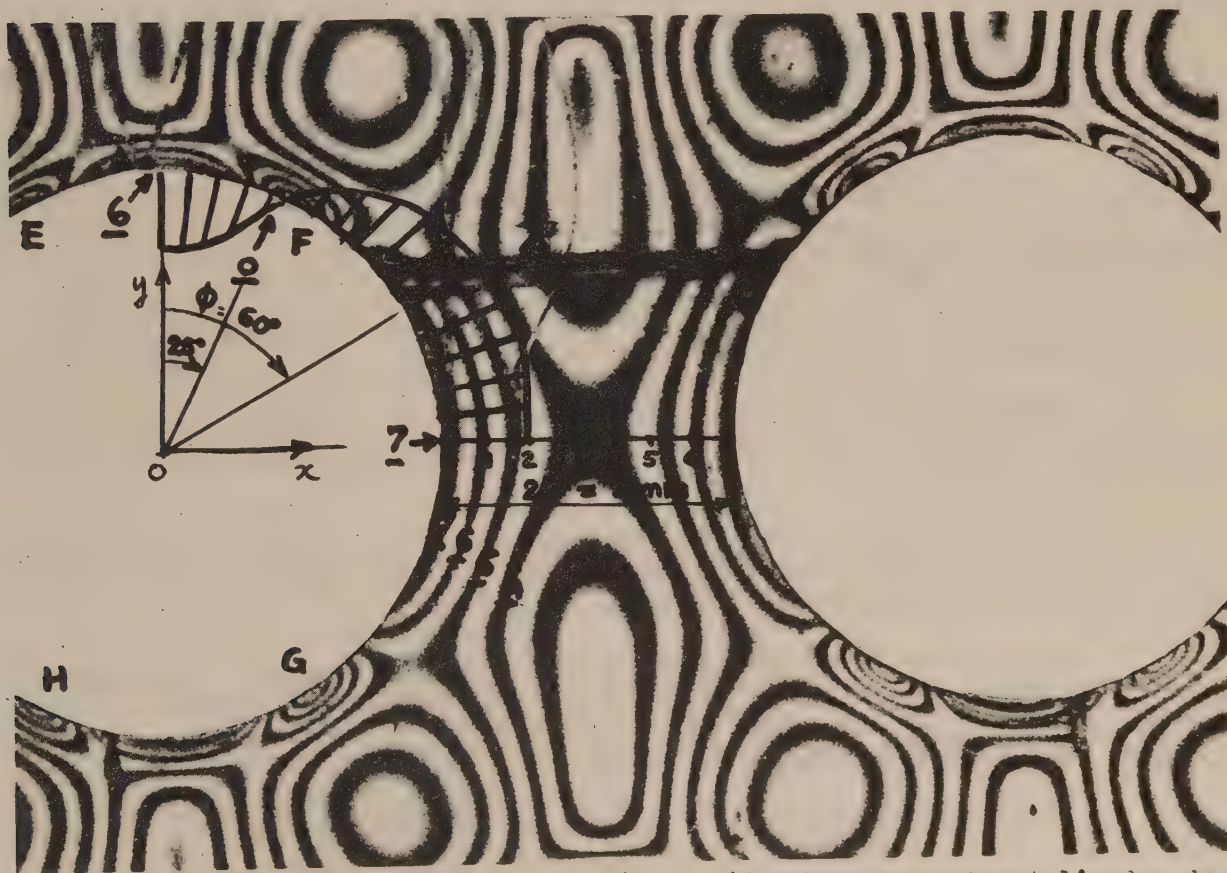


Fig. I-3,23-4. Photo agrandie du réseau d'isochromes montrant l'ordre des franges. (traction avec 2 franges dans la partie pleine ; $h/R = 0,35$) (les ordres de franges sont indiqués par des chiffres soulignés).

sur cette ligne étant nulle aux 2 extrémités, il doit avoir au moins un maximum ou un minimum en un point intermédiaire. D'après le théorème de MESNARD [30], lorsque le bord A est concave, on sait que σ_1 est une tension. Cette contrainte σ_1 devient maximale au point cupique M.

A partir du réseau d'isochromes (Fig. I-3,23-4), nous pouvons d'abord tracer la courbe de variation de $(\sigma_2 - \sigma_1)$ le long de AB. (Fig. I-3,23-5). La mesure de sa pente donne les valeurs de $\frac{\partial(\sigma_2 - \sigma_1)}{\partial s_1}$ aux points A et B, s_1 étant l'abscisse curviligne sur l'isostatique S_1 .

$$\left[\frac{\partial(\sigma_2 - \sigma_1)}{\partial s_1} \right]_A = - \left[\frac{\partial(\sigma_2 - \sigma_1)}{\partial s_1} \right]_B = \frac{-6,9}{3,5} = -1,97 \text{ ordres/mm.}$$

A partir des équations de LAME-MAXWELL ([30] p. 59), nous obtenons les valeurs de $\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_1}$ aux points A et B.

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)_A}{\rho_1} \quad \rho_1 : \text{rayon de courbure au bord ; ici c'est le rayon du trou.}$$

$$\text{en A, on a } \left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} \right]_A = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)_A}{\rho_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\rho_1} = \frac{7}{6,5} = 1,08 \text{ ordre/mm.}$$

On peut ainsi déterminer la tangente en A' à la courbe σ_2 , elle a pour pente :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_1} \right]_A &= \left[\frac{\partial(\sigma_2 - \sigma_1)}{\partial s_1} \right]_A + \left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} \right]_A \\ &= -1,97 + 1,08 = -0,89 \text{ ordres/mm.} \end{aligned}$$

Nous savons aussi que $\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} = 0$ (nul au point cupique),

$$\text{d'où : } \left[\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_1} \right]_M = \left[\frac{\partial(\sigma_2 - \sigma_1)}{\partial s_1} \right]_M$$

Les tangentes aux courbes σ_2 et $(\sigma_2 - \sigma_1)$ sont donc parallèles au point cupique. (Fig. I-3,23-5).

Nous savons que la courbe de σ_2 passe par A' et B' et nous connaissons également sa tangente en ces points et au point S où elle coupe l'ordonnée passant par M.

Ici le point S ne peut être obtenu comme l'intersection de la bissectrice de β avec la perpendiculaire en M à AB, car la courbure du graphique entre A' et S est loin d'être constante.

Dans ce cas, nous devons estimer la position de S par la considération de toutes les conditions : tracer une courbe d'essai, contrôler l'égalité des surfaces Σ_1 et Σ_2 comprises entre la courbe et la ligne moyenne représentant la contrainte moyenne théorique égale à :

$$[\sigma_{2 \text{ moy}}]_{\text{théoriques}} = 2 R/h = 5,72 \text{ ordres de franges.}$$

(la contrainte dans la partie pleine ayant un ordre 2)

La courbe σ_2 peut être ainsi obtenue avec une précision suffisante. (Fig. I-3,23-5).

La courbe σ_1 se déduit en faisant la différence entre les ordonnées des 2 graphiques.

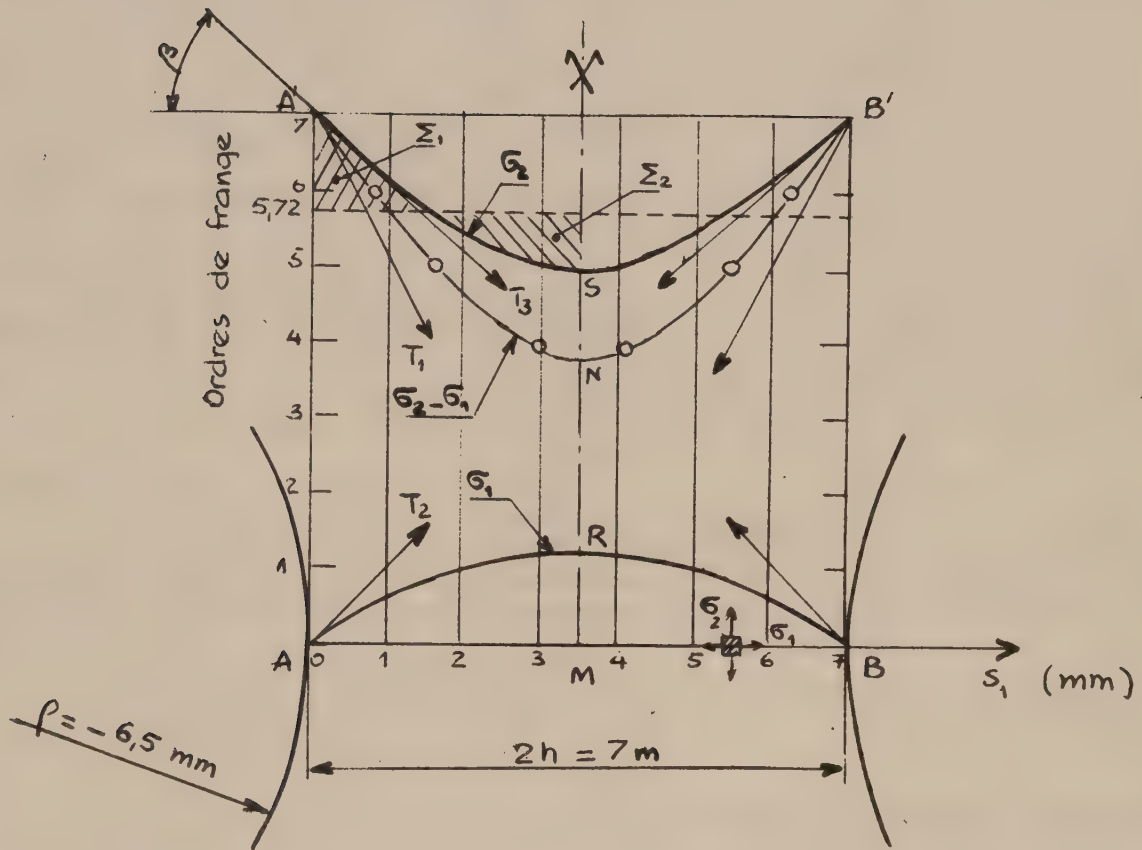


Fig. I-3,23-5. Construction des courbes des contraintes principales σ_1 et σ_2 le long de AB.

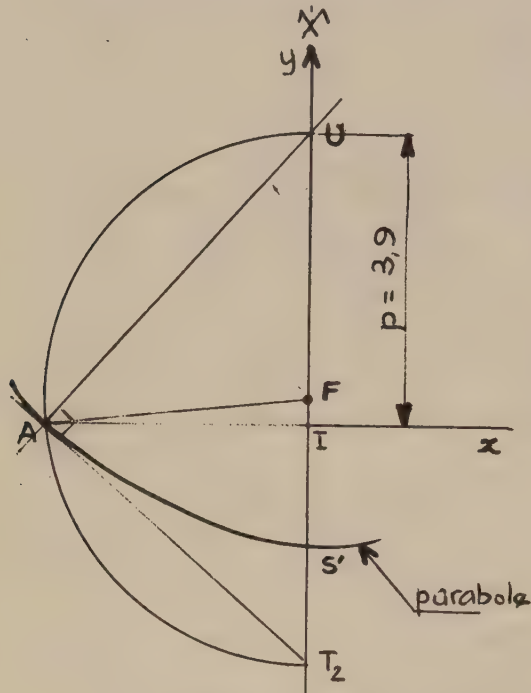
Tangente A'T₁, pente : $\frac{\partial(\sigma_2 - \sigma_1)}{\partial s_1} = -1,97$ ordres/mm.

Tangente AT₂, pente : $\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} = +1,08$ ordres/mm.

Tangente A'T₃, pente : $\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_1} = -1,97 + 1,08 = -0,89$ ordre/mm.

D'après la Fig. I - 3,23-5, la contrainte σ_2 peut-être assimilée à une parabole. Recherchons l'équation de cette parabole.

On connaît un point, la tangente en ce point et l'axe de symétrie. Le paramètre p peut être déterminé graphiquement (Fig. I-3,23-6). On trouve $p = 3,9$ en ordres de frange.



L'équation rapportée aux axes passant par le sommet de la parabole est :

$$y = \frac{1}{2p} x^2$$

d'où $IS' = \frac{1}{2 \times 3,9} (3,5)^2 = 1,57$ ordres de frange
ce qui donne $S'M = 5,43$ ordres de frange.

La contrainte σ_2 peut être représentée par l'équation rapportée aux axes de symétrie (axes des ordonnées MS, des abscisses AB) (Fig. I-3,23-5) .

$$\sigma_2 = 0,128 x^2 + 5,43$$

σ_2 étant exprimé en ordres de frange.

L'erreur maximale lorsqu'on applique cette formule au lieu d'utiliser la courbe expérimentale précédente est de 6,5 % .

Fig. I - 3,23-6. Détermination du paramètre de la parabole.

Cette erreur maximale est atteinte sur l'axe de symétrie, c'est-à-dire qu'elle correspond au minimum de σ_2 dont la valeur réelle est inférieure à celle calculée par la distribution parabolique.

La traction étant faite avec 2 franges dans la partie pleine, la distribution de contrainte σ_1 et σ_2 le long de la section minimale de ligament AB est donnée à la Fig. I-3,23-7.

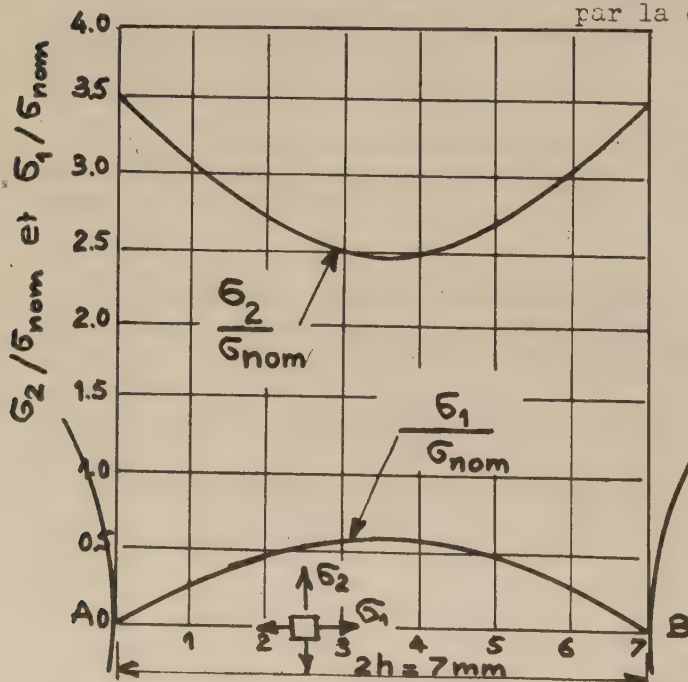


Fig. I-3,23-7. Distribution de contrainte le long de la section minimale de ligament d'une bande perforée en traction simple.

$$h/R = 0,35$$

$$\sigma_{nom} = \sigma_y$$

σ_{nom} : contrainte nominale.

I - 3,3. CONCENTRATION DE CONTRAINTE. COURBES DE MAJORATION DE CONTRAINTE.

Dans le présent paragraphe, nous allons déterminer les facteurs de majoration de contrainte au bord des orifices en fonction du rapport h/R et du degré de biaxialité β ($-1 \leq \beta \leq 1$).

Les caractéristiques des différents modèles sont réunies dans le tableau suivant :

Modèle n°	h/R	$2R(\text{mm})$	$2h(\text{mm})$	$2r(\text{mm})$	$H(\text{mm})$	$b(\text{mm})$
1	0,50	20	10	10	10	80
2	0,35	20	7	13	10	80
3	0,25	20	5	15	10	80
4	0,15	20	3	17	10	60

Tableau I - 3,3-1. Eprouvettes perforées plates de traction simple
(matière : araldite $\nu = 0,33$).
 H : épaisseur b : largeur

Nous allons étudier d'abord la distribution de contrainte tangentielle au bord du trou dans le cas d'une contrainte uniaxiale. Puis nous en déduirons à partir de ces résultats les concentrations de contraintes pour les différents degrés de biaxialité conformément à la méthode de superposition de SAMPSON [12].

$\beta = 0$, contrainte uniaxiale ,
 $\beta = 1$, contrainte isotropique,
 $\beta = -1$, cisaillement pur.

I - 3,31 - Distribution de contrainte tangentielle au bord du trou, lorsque la plaque perforée est soumise à une contrainte uniaxiale.

Les 4 bandes perforées sont soumises à la traction simple, les réseaux d'isochromes obtenus sont représentés à la Fig. I-3,31-1.

Comme exemple d'analyse de contrainte, nous prenons la bande perforée de $h/R = 0,35$. Les isoclines, les isostatiques et les isochromes dans les ligaments sont données aux Fig. I-3,23-1,2,3.

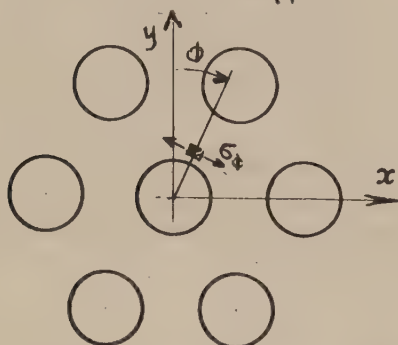
La charge étant appliquée graduellement, les isochromes commencent à se former sur les côtés du trou, se déplacent puis se réduisent à 2 points de différence de contraintes minimale au-dessus et au-dessous de chaque trou.

Les isoclines rayonnent autour des 4 points E, F, G, H situés sur le bord du trou (Fig. I-3,23-2), ce qui indique que ces points sont des points singuliers et comme ils sont situés sur le contour libre, ce sont des points de contrainte nulle.

La Fig. I-3,23-4 est prise avec la frange centrale noire. Les points où le retard relatif est nul ou égal à un nombre entier de longueur d'onde, sont donc noirs. Aux points E, F, G, H en conséquence, il doit y avoir des points noirs sur le contour du trou. En comptant les franges à partir de ces points, nous trouvons les nombres de franges autour du trou (Fig. I-3,23-4). Puisqu'il y a 2 axes de symétrie, il suffit d'étudier pour $0 \leq \Phi \leq \pi/2$. Nous pouvons tracer en coordonnées polaires la courbe d'ordre de frange en fonction de la position angulaire Φ repérée à partir de direction de traction y.

Au bord du trou, la contrainte radiale étant nulle, la contrainte tangentielle est donc donnée par :

$$\sigma_{\Phi} = n_{\Phi} \frac{f}{H} \quad \dots (I-3,31-1)$$



où σ_{Φ} : contrainte tangentielle au bord du trou,
 n_{Φ} : ordre de frange,
 f : valeur de frange pour une plaque d'1 mm d'épaisseur,
 H : épaisseur de la plaque.

La bande perforée est soumise à la contrainte σ_y avec 2 franges dans la partie pleine (§ I-3,22), on a :

$$\sigma_y = 2 \frac{f}{H}, \text{ d'où avec la formule I-3,31-1, nous en déduisons :}$$

$$\frac{\sigma_{\Phi}}{\sigma_y} = \frac{n_{\Phi}}{2}$$

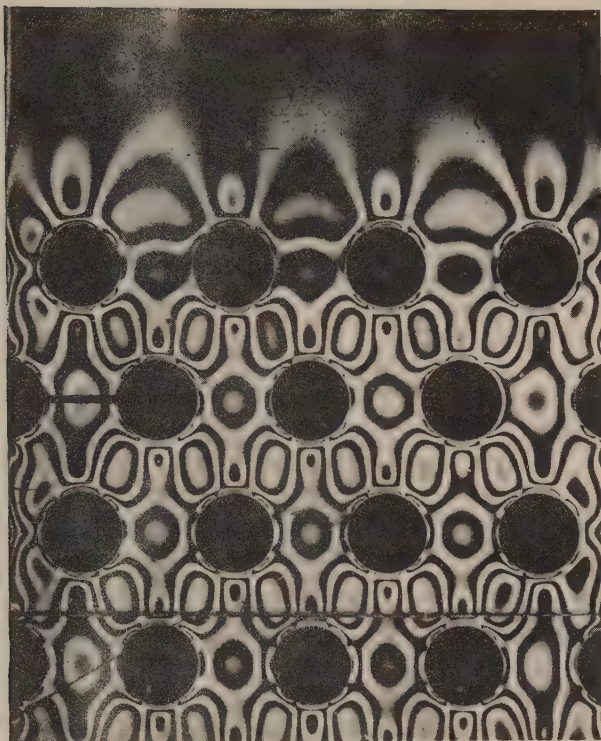
La courbe $\left[\frac{\sigma_{\Phi}}{\sigma_y}\right]_{x=0}$ ($x=0$ signifie $\sigma_x = 0$) tracée en fonction de la position angulaire Φ est donnée à la Fig. I-3,23-4.

La même étude est faite pour les différentes éprouvettes de $h/R = 0,50 - 0,25 - 0,15$. (Fig. I-3,31-1). Les courbes $\left[\frac{\sigma_{\Phi}}{\sigma_y}\right]_{x=0}$ correspondantes sont tracées aux figures I-3,32-5-7 et 8; pour $h/R = 1$, l'étude a été faite par KIRSCH. (Fig. I-3,32-4).

I- 3,32 - Distribution de contrainte au bord du trou, lorsque la plaque perforée est soumise à une contrainte biaxiale

L'étude en contrainte uniaxiale permet de déduire des résultats en contrainte biaxiale par superposition [12]. Ceci est possible à cause de la symétrie de la figure et du chargement.

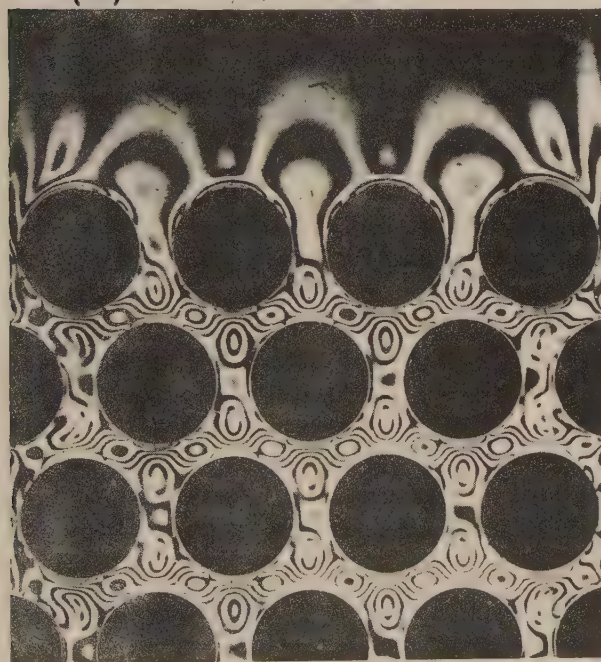
La distribution de contrainte tangentielle, lorsque la plaque est soumise à une contrainte uniaxiale, peut être représentée en coordonnées polaires : Fig. I-3,32-1.



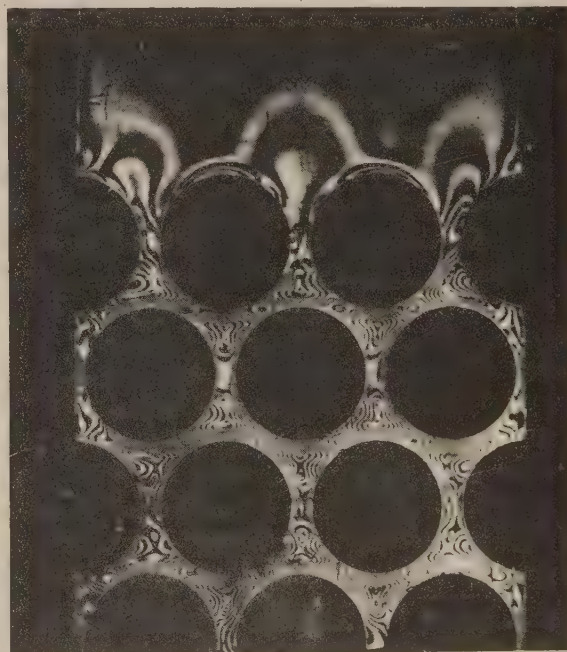
$h/R=0,50$. Traction avec 2 franges dans la partie pleine.
(a) $F = 1\,706\text{ N}$



$h/R = 0,35$. Traction avec 2 franges dans la partie pleine.
(b) $F = 1\,706\text{ N}$



$h/R = 0,25$. Traction avec 1 frange dans la partie pleine.
(c) $F = 853\text{ N}$



$h/R = 0,15$. Traction avec $F = 613\text{ N}$.
(d)

Fig. I-3,31-1. Plaques perforées en traction simple.

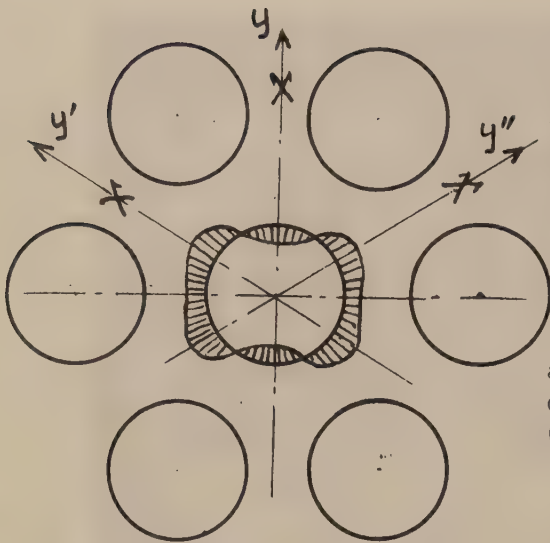


Fig. I-3,32-1.

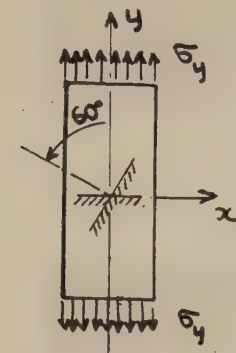
En examinant la figure, on voit que les chargements suivants y, y', y'' donnent les mêmes distributions de contrainte tangentielle et que la courbe se déplace de $\pm \pi/3$, ainsi :

$$(\sigma_\phi)_{y''} = (\sigma_{\phi-\pi/3})_y$$

...(I-3,32-1)

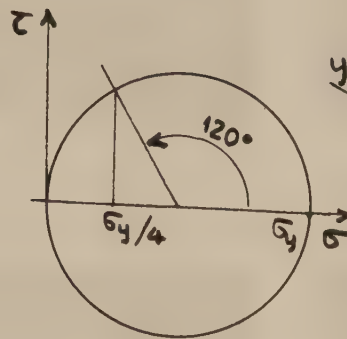
$$(\sigma_\phi)_{y'} = (\sigma_{\phi+\pi/3})_y$$

La superposition des 3 contraintes uniaxiales égales à σ_y suivant y, y', y'' donne une contrainte plane isotropique d'intensité $3/2 \sigma_y$ (Fig. I-3,32-2 a-b-c).



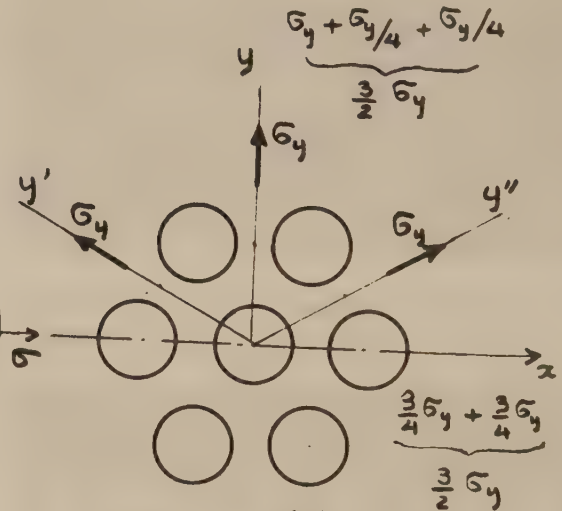
(a)

Traction simple



(b)

Cercle de MOHR



(c)

Superposition

Fig. I-3,32-2

La distribution de contrainte tangentielle au bord des trous en fonction des résultats de l'essai uniaxial est :

$$\left[\frac{\sigma_\phi}{\frac{3}{2}\sigma_y} \right]_{x=y} = \left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} + \frac{\sigma_{\phi+\pi/3}}{\sigma_y} + \frac{\sigma_{\phi-\pi/3}}{\sigma_y} \right]_{x=0} \quad \begin{array}{l} \text{l'indice } x = y \text{ signifie } \sigma_x = \sigma_y \text{ (isotropique)} \\ x = 0 \text{ signifie } \sigma_x = 0 \text{ (uniaxial).} \end{array}$$

$$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=y} = \frac{2}{3} \left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} + 2 \frac{\sigma_{\phi+\pi/3}}{\sigma_y} + 2 \frac{\sigma_{\phi-\pi/3}}{\sigma_y} \right]_{x=0} \quad \text{isotropique } (\beta = 1) \quad \dots(\text{I-3,32-2})$$

La distribution de contrainte produite par la contrainte uniaxiale dans la direction x , peut être obtenue en superposant $-\sigma_y$ dans la direction y :

$$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_x} \right]_{y=0} = \left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=y} - \left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=0}$$

d'où

$$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_x} \right]_{y=0} = \frac{1}{3} \left[-\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} + 2 \frac{\sigma_{\phi+\pi/3}}{\sigma_y} + 2 \frac{\sigma_{\phi-\pi/3}}{\sigma_y} \right]_{x=0} \quad \dots(\text{I-3,32-3})$$

uniaxial dans la direction x ($\beta = 0$)

La distribution de contrainte dans le cas du cisaillement pur est obtenue en appliquant : $\sigma_x = -\sigma_y$

$$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=-y} = \left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=0} - \left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_x} \right]_{y=0}$$

d'où :

$$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=-y} = \frac{2}{3} \left[2 \frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} - \frac{\sigma_{\phi+\frac{\pi}{2}}}{\sigma_y} - \frac{\sigma_{\phi-\frac{\pi}{2}}}{\sigma_y} \right]_{x=0} \quad \dots (I-3,32-4)$$

cisaillement pur ($\beta = -1$)

Puisque la contrainte au bord est fonction linéaire avec les 2 composants de la contrainte biaxiale, elle est déterminée, pour des degrés intermédiaires de la biaxialité, et pour une valeur donnée de h/R et de ϕ , par interpolation linéaire entre les 2 cas extrêmes de chargement isotropique ($\sigma_x = \sigma_y$) et de cisaillement pur ($\sigma_x = -\sigma_y$).

Les résultats des calculs avec les formules I-3,32-2-3 et 4 sont réunis dans les tableaux I-3,32-3.

Tableaux I-3,32-3

$h/R = 1$

ϕ (en degrés)	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=0}$	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_x} \right]_{y=0}$	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=y}$	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=-y}$
0	- 1,0	3,00	2	- 4,00
10	- 0,9	2,88	2	- 3,76
20	- 0,5	2,53	2	- 3,06
30	0	2,00	2	- 2,00
40	0,7	1,35	2	- 0,70
50	1,4	0,65	2	0,70
60	2,0	0	2	2,00
70	2,5	- 0,53	2	3,06
80	2,9	- 0,88	2	3,76
90	3,0	- 1,00	2	4,00

(voir Fig. I-3,2-4)

$$h/R = 0,50$$

Φ (en degrés)	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=0}$	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_x} \right]_{y=0}$	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=y}$	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=-y}$
0	- 1,5	3,97	2,47	- 5,47
10	- 1,2	3,73	2,53	- 4,93
20	- 0,5	3,17	2,67	- 3,64
30	0,5	2,37	2,87	- 1,87
40	1,3	1,37	2,67	- 0,07
50	2,0	0,80	2,53	1,47
60	2,6	- 0,13	2,47	2,73
70	3,0	- 0,47	2,53	3,46
80	3,2	- 0,40	2,67	3,67
90	3,3	- 0,43	2,87	3,74

(voir fig. I-3,2-5)

$$h/R = 0,35$$

Φ (en degrés)	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=0}$	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_x} \right]_{y=0}$	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=y}$	$\left[\frac{\sigma_\phi}{\sigma_y} \right]_{x=-y}$
0	- 3,0	5,54	2,54	- 8,52
10	- 2,3	5,24	2,94	- 7,53
20	- 1,0	4,30	3,20	- 5,20
30	1,0	2,67	3,67	- 1,67
40	2,3	0,87	3,20	1,40
50	3,2	- 0,27	2,94	3,47
60	3,4	- 0,87	2,54	4,27
70	3,5	- 0,57	2,94	4,33
80	3,5	- 0,30	3,20	3,80
90	3,5	0,17	3,67	3,33

(voir fig. I-3,2-6)

$$h/R = 0,25$$

Φ (en degrés)	$\left[\frac{\sigma_{\phi}}{\sigma_y} \right]_{x=0}$	$\left[\frac{\sigma_{\phi}}{\sigma_x} \right]_{y=0}$	$\left[\frac{\sigma_{\phi}}{\sigma_y} \right]_{x=y}$	$\left[\frac{\sigma_{\phi}}{\sigma_y} \right]_{x=-y}$
0	- 3,3	8,83	3,53	- 14,30
10	- 4,3	8,10	3,83	- 12,40
20	- 2,0	6,07	4,07	- 8,07
30	1,0	3,33	4,33	- 2,53
40	3,4	0,67	4,07	2,74
50	5,0	- 1,20	3,80	6,20
60	5,3	- 1,77	3,53	7,07
70	5,0	- 1,20	3,80	6,20
80	4,7	- 0,63	4,07	5,33
90	4,5	- 0,17	4,33	4,67

(voir fig. I-3,2-7)

$$h/R = 0,15$$

Φ (en degrés)	$\left[\frac{\sigma_{\phi}}{\sigma_y} \right]_{x=0}$	$\left[\frac{\sigma_{\phi}}{\sigma_x} \right]_{y=0}$	$\left[\frac{\sigma_{\phi}}{\sigma_y} \right]_{x=y}$	$\left[\frac{\sigma_{\phi}}{\sigma_y} \right]_{x=-y}$
0	- 11,3	16,45	5,13	- 27,70
10	- 10,0	15,37	5,40	- 25,32
20	- 5,6	12,52	6,94	- 18,30
30	2,2	5,67	7,87	- 3,47
40	9,4	- 2,80	6,94	11,92
50	11,5	- 6,10	5,40	18,26
60	9,5	- 4,37	5,13	13,86
70	6,6	- 1,20	5,40	7,80
80	6,6	0,33	6,94	6,27
90	7,4	0,47	7,87	6,95

(voir fig. I-3,2-8)

Les variations des contraintes tangentielles pour différents degrés de biaxialité sont représentées graphiquement en fonction des positions angulaires ϕ . (Fig. I-3,32-4-5-6-7-8).

I - 3,33 - Facteurs de majoration de contrainte .

En examinant les figures I-3,32-4-5-6 et 8, nous remarquons que :

- pour un chargement uniaxial ($\beta = 0$), la contrainte tangentielle est maximale pour $\phi = 0$, quand la direction de traction est x .
- pour un chargement isotropique ($\beta = 1$), elle est maximale pour $\phi = 30^\circ$ et 90° .
- pour un cisaillement pur ($\beta = -1$), elle est maximale pour $\phi = 0$.

d'où le tableau suivant :

Tableau I-3,33-1.

h/R	1	0,50	0,35	0,25	0,15
$Y_{\beta=0}$	3,00	3,97	5,54	8,83	16,45
$Y_{\beta=1}$	2,00	2,87	3,67	4,33	7,87
$Y_{\beta=-1}$	4,00	5,47	8,52	14,30	27,70

(voir fig. I-3,33-2)

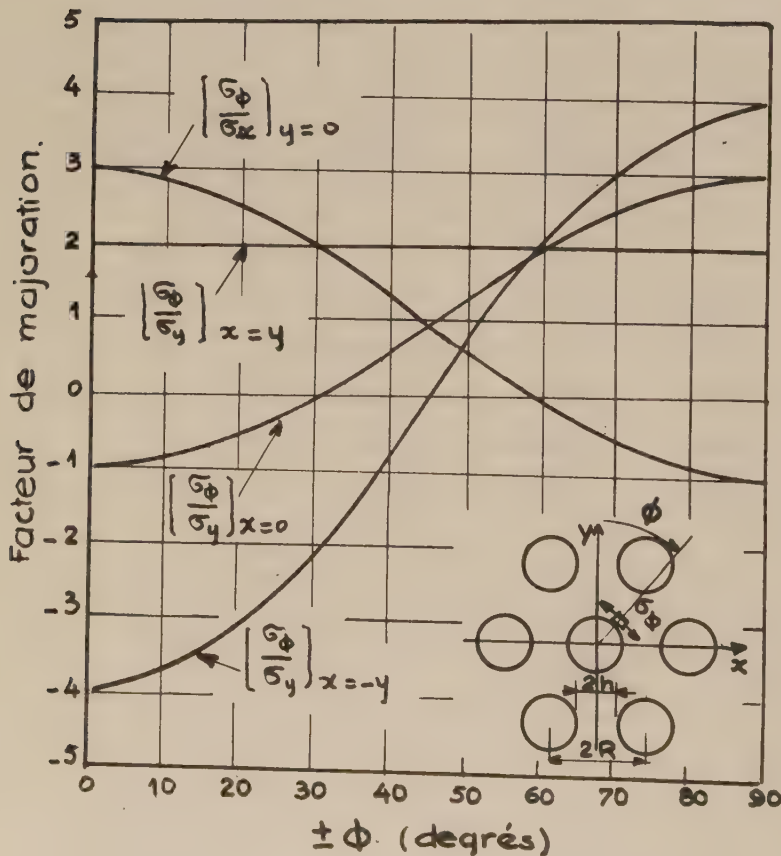


Fig. I-3,2-4. Majoration de contrainte au bord du trou. ($h/R = 1$)

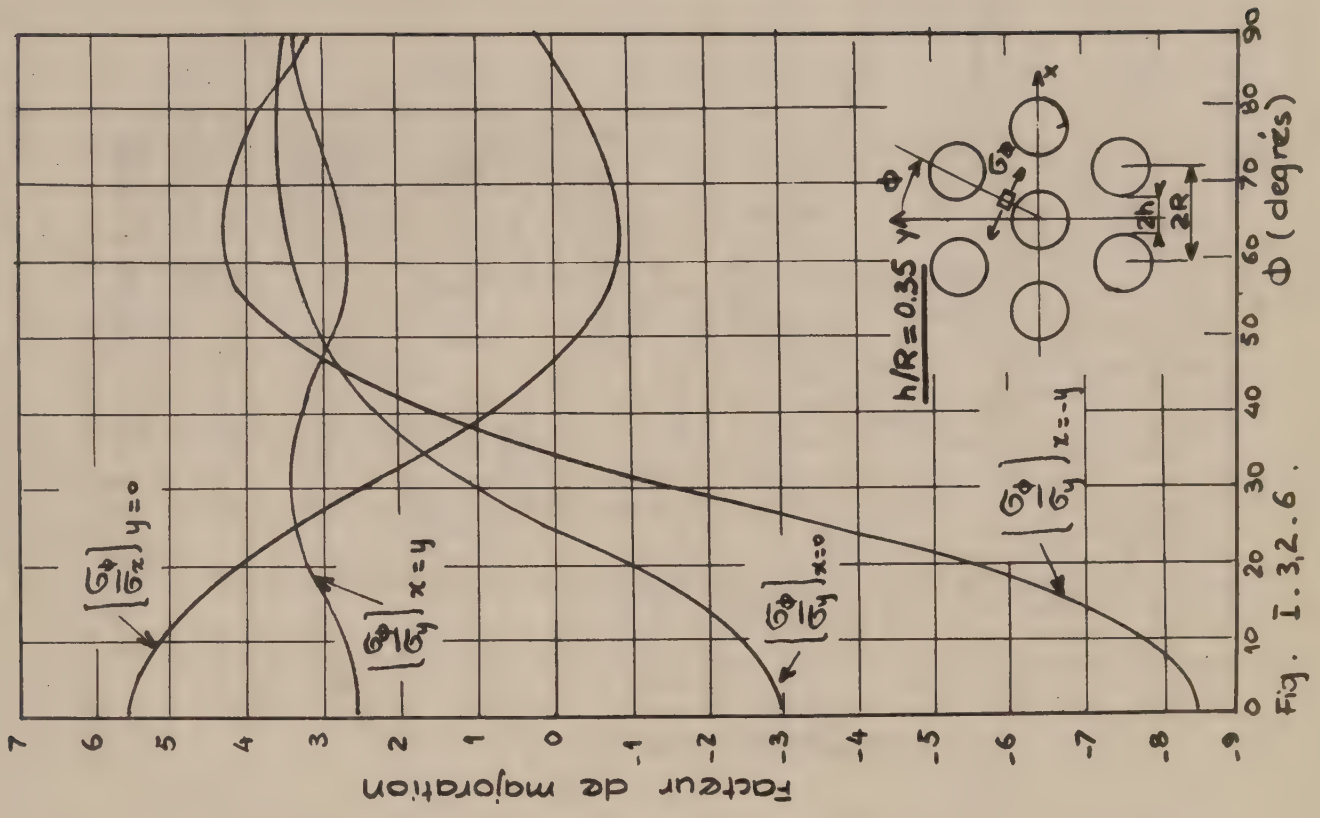


Fig. I.3.2.6.

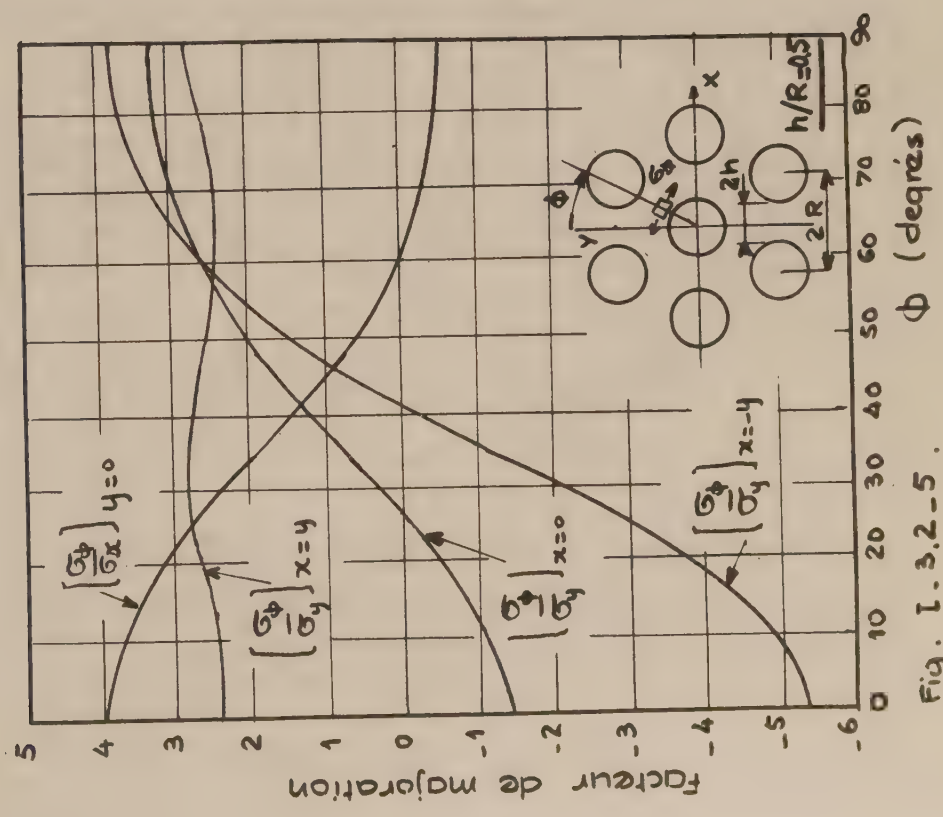


Fig. I.3.2.5.

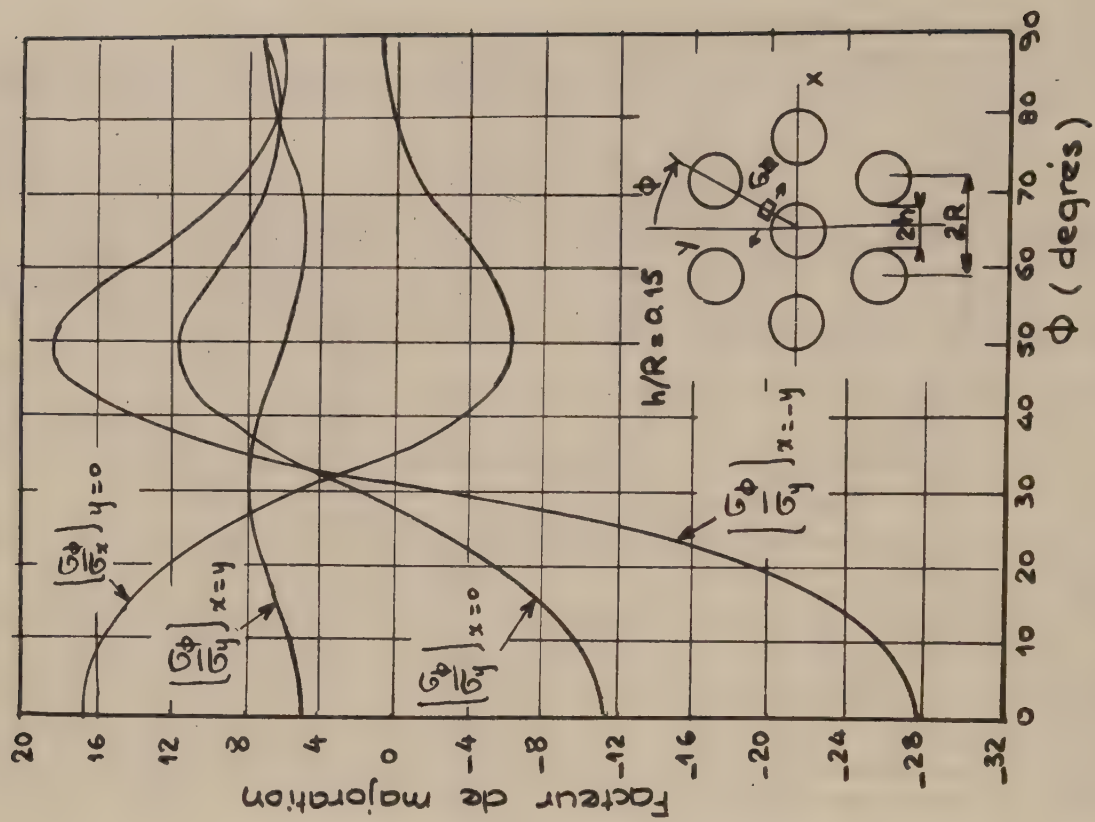


Fig I-3.2.8 $h/R = 0.15$

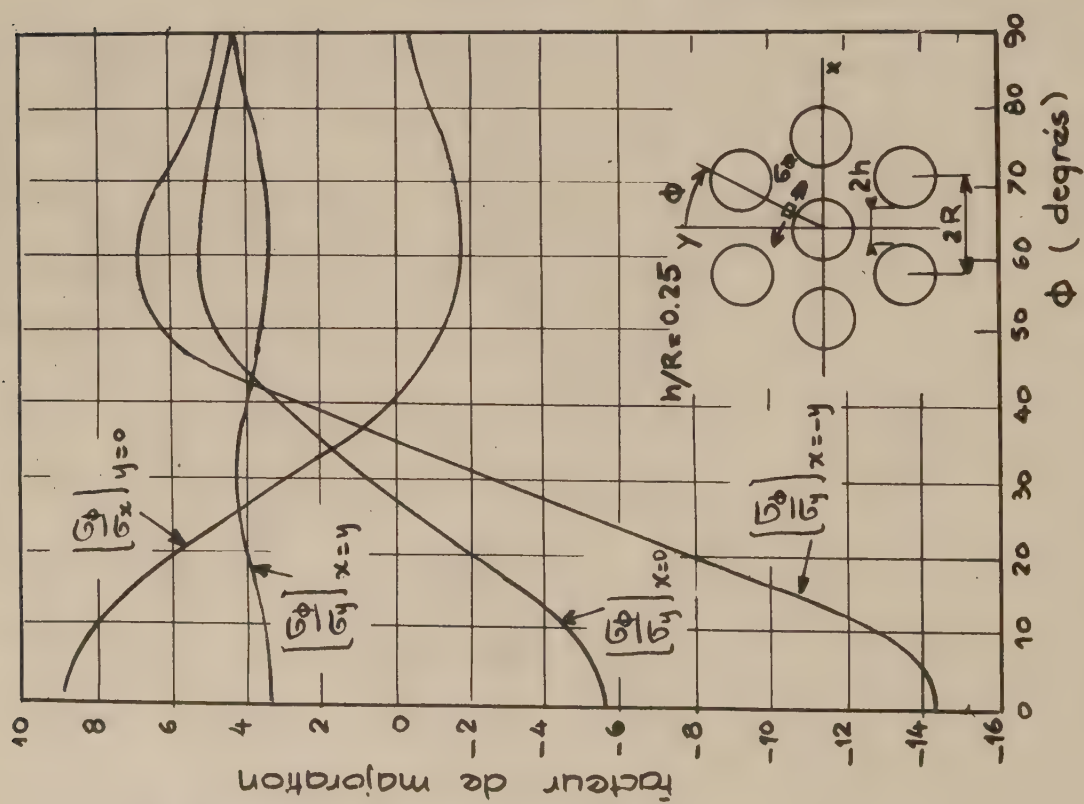


Fig. I-3.2.7. $h/R = 0.25$

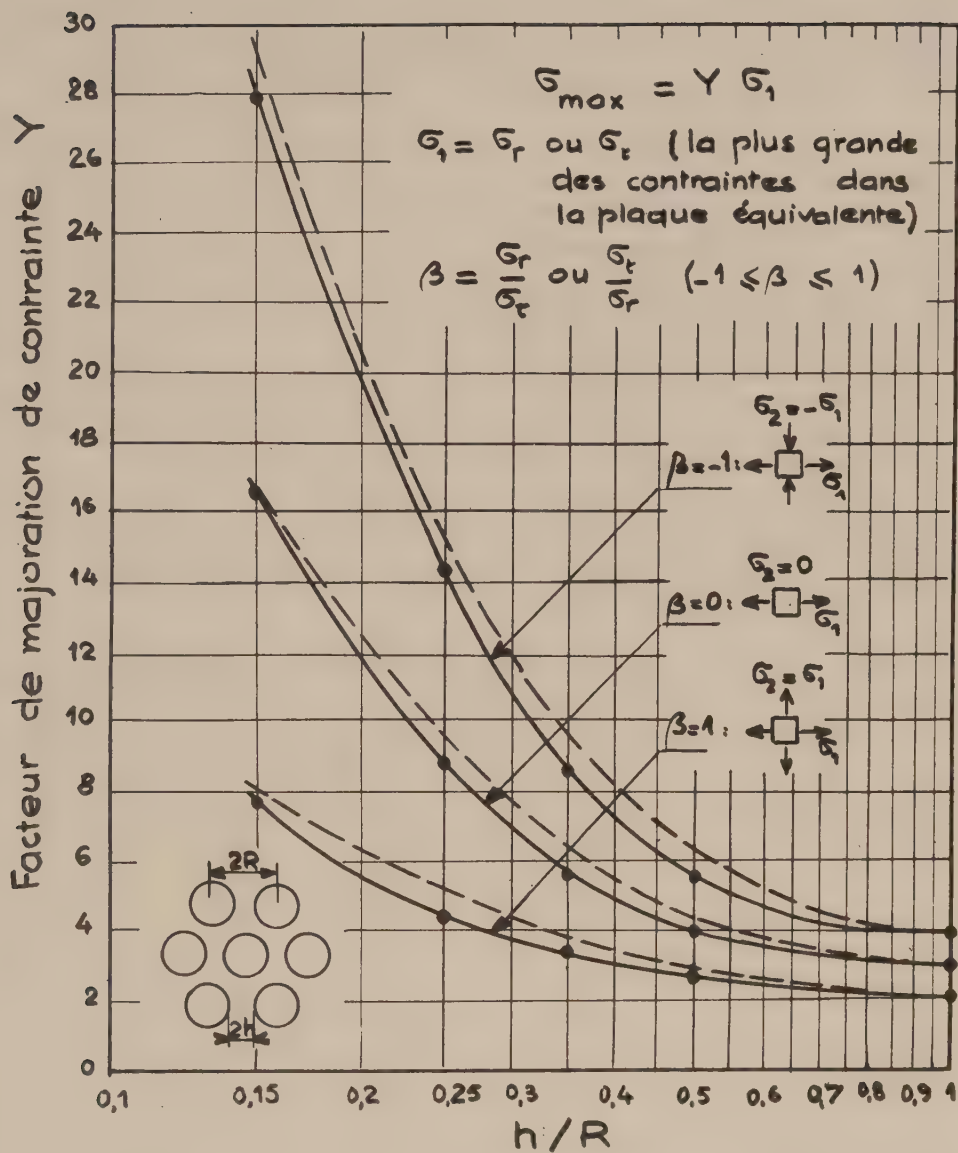


Fig. I-3,33-2. Facteur de majoration de contrainte.

--- courbes trouvées par SAMPSON ($\nu = 0,5$)

— courbes trouvées sur modèle en araldite ($\nu = 0,33$)

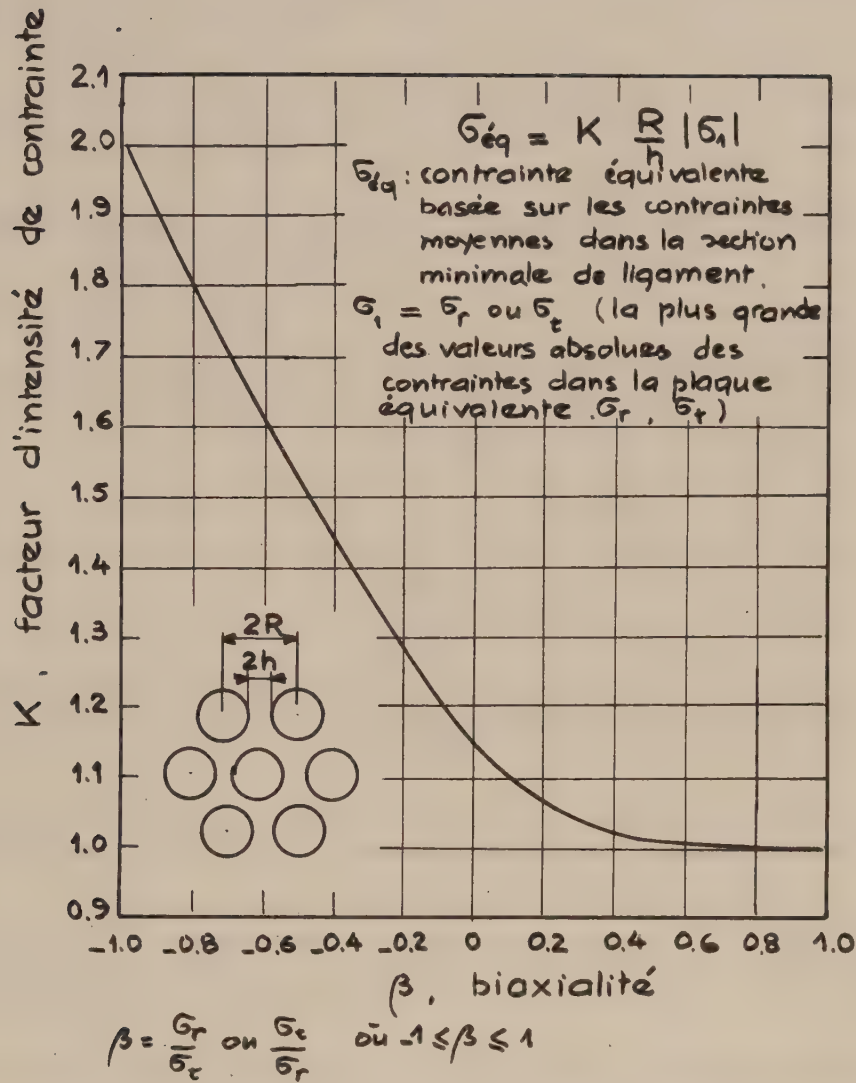


Fig. I-3,4-2. Intensité de contrainte de ligament dans une plaque perforée.

(courbe calculée par O'DONNELL)

I - 4. VALIDITE DES METHODES DE CALCUL DES PLAQUES PERCEES DE NOMBREUX TROUS. - CONTROLE DES RESULTATS.

Dans le chapitre I - 1. nous avons vu que dans chaque méthode, différents auteurs proposent divers groupes de coefficients et de constantes qui diffèrent nettement.

Dans le chapitre I - 2., nous avons mesuré expérimentalement les constantes élastiques équivalentes E^* et ν^* qui concordent avec les résultats de O'DONNELL.

Dans le chapitre I - 3. nous avons étudié la majoration de contrainte, et nous avons trouvé que le coefficient de POISSON a une influence sensible sur celle-ci.

Dans le présent chapitre, nous allons contrôler ces divers résultats.

Notre premier objectif consiste à déterminer la validité de diverses méthodes de calcul.

Nous avons vu d'autre part que le rapport de rigidité D^*/D diminue lorsque la plaque devient épaisse, autrement dit, les constantes élastiques varient avec l'épaisseur pour le même perçage (Fig. I-1,22-14) .

Notre deuxième objectif consiste à chiffrer l'erreur commise lorsqu'on néglige l'influence de l'épaisseur.

Dans ce but, nous avons construit un appareil expérimental qui permet de charger par une force concentrée, diverses plaques perforées circulaires reposant sur un appui simple et de mesurer les contraintes et les flèches ainsi obtenues en vue de comparer aux résultats théoriques.

I - 4,1 - VALIDITE DES DIVERSES METHODES DE CALCUL DES PLAQUES PERCEES DE NOMBREUX TROUS.

Nous allons calculer par différentes méthodes les flèches et les contraintes d'une plaque complètement percée, appuyée à la périphérie et chargée au centre.

La confrontation des résultats théoriques et expérimentaux permet de conclure sur la validité des diverses méthodes.

I- 4,11 - Calcul d'une plaque complètement percée, appuyée à la périphérie et chargée au centre.

I - 4,111 - Flèche

La flèche d'une plaque complètement percée, appuyée à la périphérie et chargée au centre par une force concentrée P est donnée par : ([34] p. 68)

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) + 2 r^2 \text{Log} \frac{r}{a} \right] \quad \dots(I-4,11-1)$$

dans laquelle il faut remplacer D par D^* et ν par ν^* pour tenir compte du perçage.

$$\left\{ \begin{array}{l} D^* = \eta_w D \quad \text{où} \quad D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} \\ \nu^* = \nu = 0,3 \end{array} \right.$$

pour la méthode des coefficients de ligament et de déflexion.

et

$$\left\{ \begin{array}{l} D^* = \frac{E^* H^3}{12(1-\nu^{*2})} \\ \nu^* \text{ fonction de } h/R \text{ pour la méthode des constantes élastiques équivalentes.} \end{array} \right.$$

Caractéristiques de la plaque :

diamètre extérieur : $2a = 502 \text{ mm}$
 épaisseur : $H = 30,2 \text{ mm}$
 pas triangulaire : $2R = 20 \text{ mm}$
 diamètre des trous : $2r = 11 \text{ mm}$
 largeur de ligament : $2h = 9 \text{ mm}$

$$h/R = 0,45$$

charge concentrée : $P = 2,94.10^4 \text{ N}$
 module d'YOUNG : $E = 20\,600 \text{ hectobars}$
 coefficient de POISSON : $\nu = 0,3$

On trouve pour divers auteurs :

Auteurs	MILLER	DUNCAN	VOLOSHIN	HORVAY	MALKIN	O'DONNELL
$D^*(Nm)$	$3,77 \cdot 10^5$	$3,48 \cdot 10^5$	$3,09 \cdot 10^5$	$1,99 \cdot 10^5$	$1,91 \cdot 10^5$	$2,30 \cdot 10^5$
ν^*	0,30	0,30	0,30	0,41	0,32	0,31

Les flèches calculées exprimées en mm sont : (Formule I-4,11-1).

Tableau I-4,11-1

Flèches exprimées en mm calculées par diverses théories.

Distance au centre mm	0	30	70	110	150	190	230
w^{MILLER}	0,248	0,240	0,209	0,170	0,124	0,076	0,026
w^{DUNCAN}	0,269	0,260	0,227	0,184	0,134	0,082	0,027
w^{VOLOSHIN}	0,303	0,293	0,256	0,207	0,151	0,092	0,031
w^{HORVAY}	0,450	0,435	0,380	0,307	0,223	0,135	0,045
w^{MALKIN}	0,486	0,467	0,409	0,332	0,242	0,147	0,049
$w^{\text{O'DONNELL}}$	0,402	0,388	0,341	0,275	0,200	0,122	0,041

(voir fig. I-4,13-1)

I - 4,112 - Contraintes -

Les contraintes dans la plaque réelle sont obtenues en multipliant les contraintes trouvées dans la plaque équivalente par le facteur de majoration de contrainte.

- 1) Dans la méthode des coefficients de ligament et de déflexion, on a :

$$\eta_w = \eta_\sigma \text{ et le facteur de majoration de contrainte est } Y = \frac{1}{\eta_\sigma}.$$

- 2) Dans la méthode des constantes élastiques équivalentes, le facteur Y dépend non seulement de h/R , mais aussi de la biaxialité β ($\beta = \sigma_r / \sigma_t$ ou σ_t / σ_r , tel que $-1 \leq \beta \leq 1$, σ_r et σ_t : contraintes radiales et tangentielles dans la plaque équivalente).

- 3) Dans les théories précédentes, il s'agit de la contrainte maximale. MILLER, DUNCAN, VOLOSHIN n'ont pas précisé dans quel ligament se trouve cette contrainte. HORVAY a précisé que cette contrainte a lieu dans les ligaments inclinés à 45° par rapport aux directions principales, c'est-à-dire radiale et tangentielle de la plaque équivalente. MALKIN n'a pas étudié la contrainte. Pour le calcul des contraintes de MALKIN, nous avons pris le facteur de majoration de HORVAY. Les contraintes peuvent être calculées plus rationnellement en

utilisant les constantes élastiques équivalentes de O'DONNELL de la manière suivante.

Les contraintes radiales et tangentiellles de la plaque équivalente sont données par : ([34] p. 68) .

$$\sigma_r = \frac{3P}{2\pi H^2} (1 + \nu^*) \log \frac{a}{r} \quad \dots(I-4,11-2)$$

$$\sigma_t = \frac{3}{2\pi} \frac{P}{H} \left[(1 + \nu^*) \log \frac{a}{r} + 1 - \nu^* \right]$$

Les contraintes dans la plaque équivalente étant connues, la contrainte moyenne longitudinale du ligement est donnée par : ([15] p. 312)

$$(\sigma_y)_{\text{moy}} = \frac{R}{h} (\sigma_r \cos^2 \psi + \sigma_t \sin^2 \psi) \quad \dots(I-4,11-3)$$

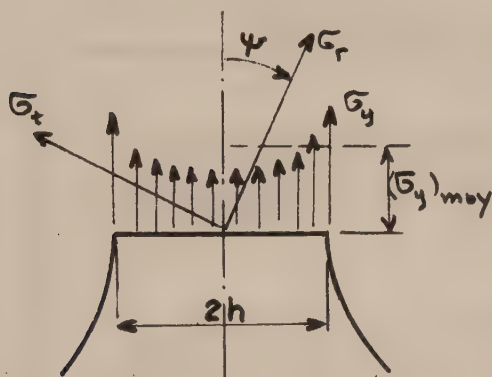


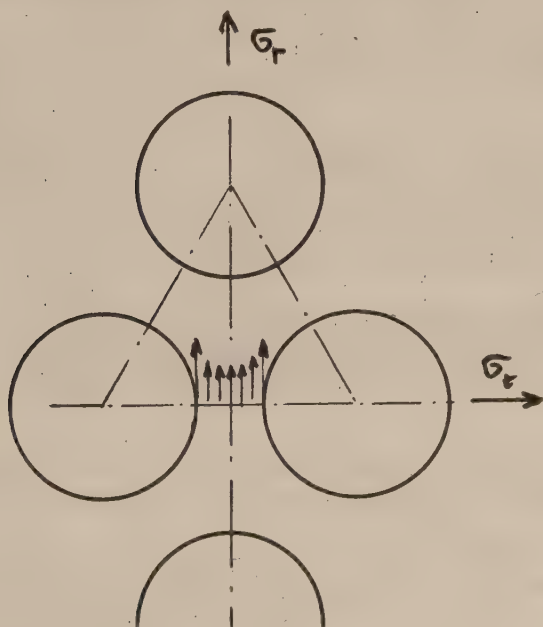
Fig. I-4,11-2. Distribution de contrainte dans la section minimale de ligament.

où ψ est l'angle que fait le ligament avec l'une des directions principales.

(Fig. I-4,11-2)

Sur les ligaments parallèles à la direction principale, on a $\psi = 0$,

$$\text{d'où } (\sigma_y)_{\text{moy}} = \frac{R}{h} \sigma_r \quad (I-4,11-4)$$



Si les jauges de mesure ne couvrent pas toute la largeur du ligament, il faut multiplier ces contraintes calculées par un facteur de correction K_1 .

$$K_1 = \frac{\sigma_{\text{moy}} \text{ sous la jauge}}{\sigma_{\text{moy}} \text{ le long du ligament}}$$

SAMPSON nous a donné la distribution de contrainte le long de la section minimale de ligament [12] en traction simple de la bande perforée. La largeur des jauges étant égale à 4,8 mm dans nos expériences, on peut donc adopter $K_1 = 0,82$.

Fig. I-4,11-3. Ligaments orientés suivant un rayon.

Les contraintes radiales ainsi calculées par différentes théories à diverses distances du centre de la plaque ont pour valeur :

Tableau I - 4,11-4.
Contraintes en hectobars calculées par diverses théories.

distance au centre mm	50	85	120	155	190
MILLER	4,52	3,02	2,06	1,34	0,77
DUNCAN	4,87	3,26	2,22	1,45	0,81
VOLOSHIN	5,48	3,67	2,50	1,63	0,94
HORVAY	9,80	6,71	4,82	3,37	2,02
MALKIN	9,29	6,59	4,61	3,17	1,92
O'DONNELL	5,94	3,97	2,71	1,76	1,02

(voir Fig. I-4,13-2)

I - 4,12 - Mesures expérimentales -

I - 4,121 - Appareil expérimental -

Principe : nous choisissons le cas simple d'une plaque complètement percée appuyée à la périphérie au milieu par une force concentrée.

Description : (Fig. I-4,12-2) Le dispositif comprend essentiellement :

1°) Une plaque circulaire complètement percée de diamètre 502 mm (Fig. I-4,12-1). Les autres caractéristiques sont données dans le § I-4,111.

2°) Cette plaque repose sur un appui simple sur toute la circonférence. L'appui est réalisé en prévoyant un couteau circulaire au diamètre extérieur de la plaque et une rainure creusée dans la couronne rigide supportée par 4 colonnes.

3°) Un dynamomètre FENWICK type MB permettant de mesurer la force concentrée. Ce dynamomètre a une gamme de mesures de 0 à $3,92 \cdot 10^4$ N en compression.

4°) Des comparateurs micrométriques disposés au-dessous de la plaque permettant de mesurer les flèches suivant un rayon.

5°) Un pont de mesure PHILIPS PR 9205 permettant de mesurer les déformations données par les jauges de déformation fabriquées par BUDD, type C6-131 de largeur 4,8 mm, pour une longueur de 5 mm.

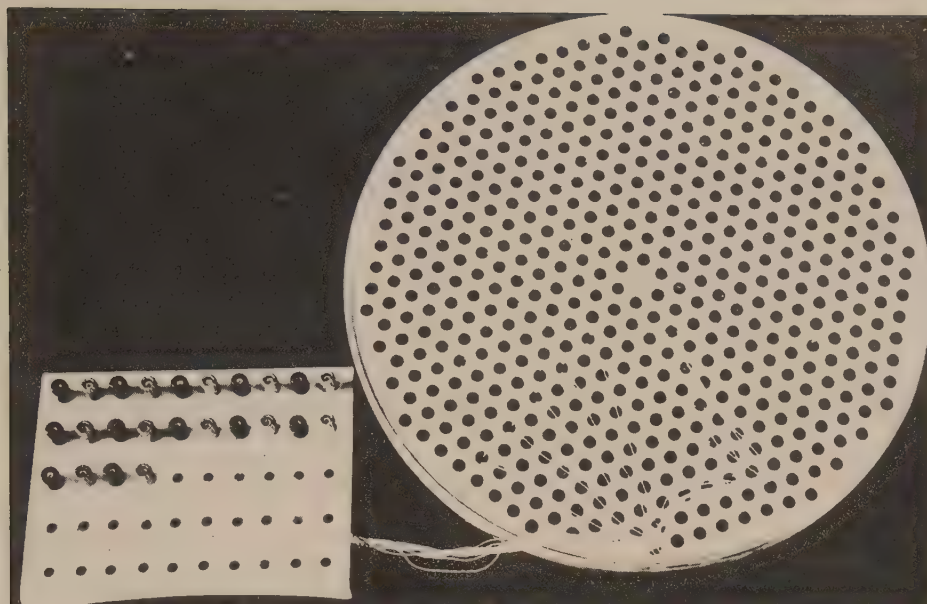


Fig. I-4,12-1.

Plaque percée de
nombreux trous.

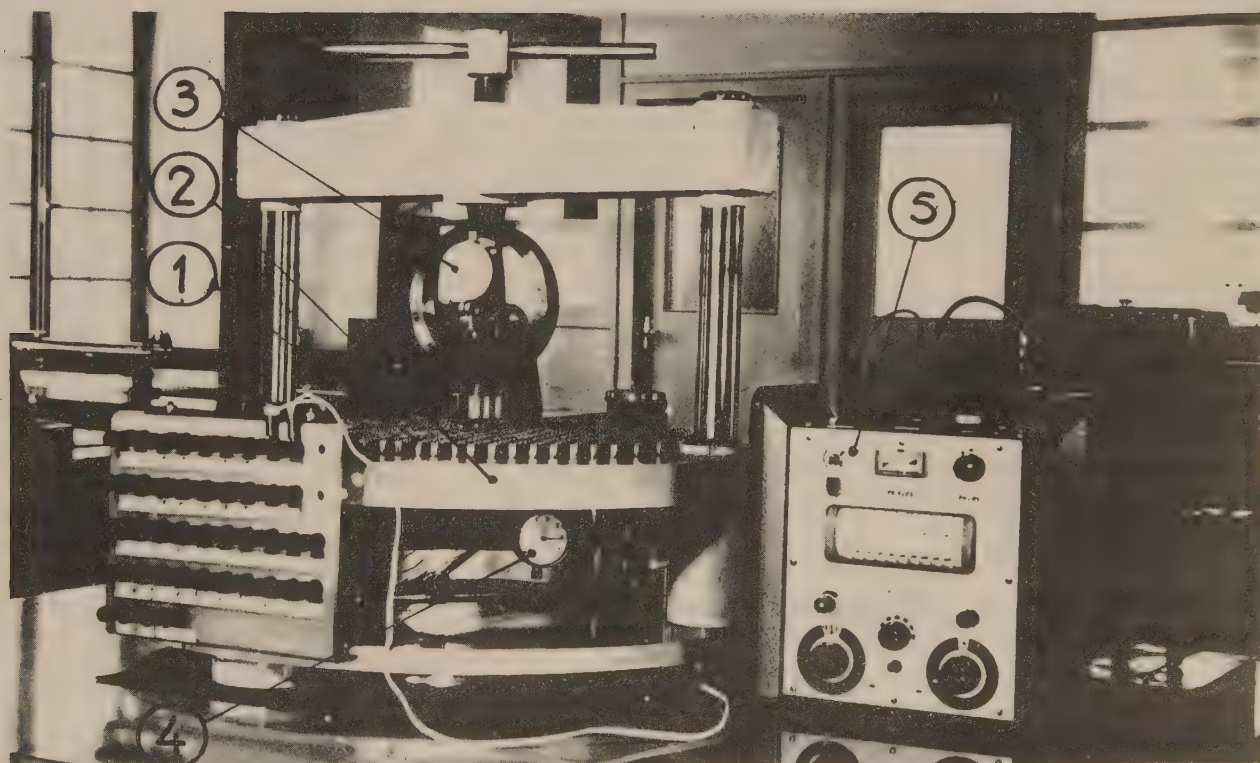


Fig. I - 4,12-2. Dispositif expérimental pour l'étude
des plaques percées.

- | | |
|------------------------------------|-----------------|
| 1) Plaque percée | 4) Comparateur |
| 2) Couronne rigide servant d'appui | 5) Pont PHILIPS |
| 3) Dynamomètre FENWICK | |

I - 4,122 - Résultats expérimentaux.

a) Flèches : 6 comparateurs sont disposés le long d'un rayon.

Lorsque la plaque est chargée à $2,94 \cdot 10^4$ N, nous avons enregistré les résultats suivants :

Tableau I - 4,12-3

$$P = 2,94 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$H = 30,2 \text{ mm}$$

Distance au centre des comparateurs (mm)	0	52	87	121	156	191
w_{mm}	0,392	0,355	0,304	0,248	0,189	0,107

(voir Fig. I-4,13-1)

b) Contraintes : des jauges ont été collées sur des ligaments orientés suivant un rayon, dans les directions radiales et tangentiellles .
(Fig. I-4,12-3-4 a et b)

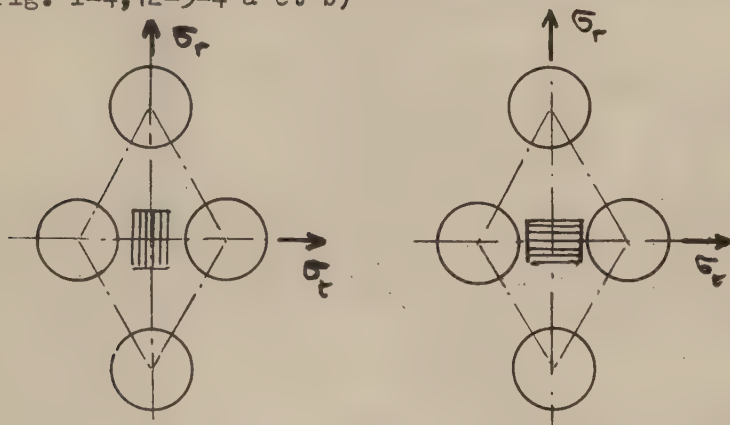


Fig. I-4,12-4.

Position des jauges
sur les ligaments.

Les contraintes mesurées sont obtenues par la relation

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_t) \text{ . D'où :}$$

Tableau I - 4,12-5

$$P = 2,94 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$H = 30,2 \text{ mm}$$

Positions des jauges (distance au centre en mm)	ϵ_r (μD)	ϵ_t (μD)	σ_r (hectobars)
51,9	217,5	40	5,20
86,6	171	36	4,12
121,2	88	22,4	2,16
155,9	50	19	1,25
190,5	29	8	0,70

(voir Fig. I-4,13-2)

Précision des résultats. Calcul d'erreur.

Les erreurs de mesure des flèches proviennent de 2 sources :

- L'erreur de lecture au dynamomètre. On peut lire à 5/1000 mm au comparateur du dynamomètre. D'après la courbe d'étalonnage, cette erreur correspond à 51 N.

La flèche est proportionnelle à la force. Au centre, on a :

$$w = kP \text{ avec } P = 2,94 \cdot 10^4 \text{ N.}$$

d'où

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta P}{P} = \frac{51}{2,94 \cdot 10^4} = 1,73 \cdot 10^{-3}, \text{ donc négligeable.}$$

- L'erreur de lecture aux comparateurs. Les comparateurs ont une précision de 5/1000 mm.

L'erreur relative sur la flèche au centre est :

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{0,005}{0,4} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ soit } 1,25 \%$$

La précision est considérée comme bonne.

Pour la mesure des contraintes, nous avons pris toutes les précautions possibles. La jauge témoin est identique à la jauge active et est collée sur le même matériau que celui de la plaque. Toutes ces jauges sont à la même température ambiante. Dans ces conditions, le Pont PHILIPS PR 2905 donne des résultats avec la précision de 1 % de la valeur mesurée.

I - 4,13 - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux -

I - 4,131 - Flèches (Fig. I-4,13-1)

- les flèches calculées par les constantes élastiques équivalentes de HORVAY et de MALKIN sont respectivement de 14 % et 23 % par excès par rapport à la flèche mesurée.

- les flèches calculées par les coefficients de déflexion de MILLER, VOLOSHIN, DUNCAN sont respectivement de 23 %, 31 %, et 37 % inférieurs par rapport à la flèche mesurée.

- la flèche calculée avec les constantes élastiques de O'DONNELL coïncide à 5 % avec la flèche mesurée.

I - 4,132 - Contraintes (Fig. I-4,13-2) -

Les contraintes calculées par les théories de HORVAY et de MALKIN, sont beaucoup trop grandes par rapport aux contraintes mesurées. Mais il s'agit là des contraintes maximales dans les ligaments inclinés à 45° par rapport aux directions principales. Ces auteurs n'ont pas donné une méthode de calcul des contraintes dans un ligament voulu.

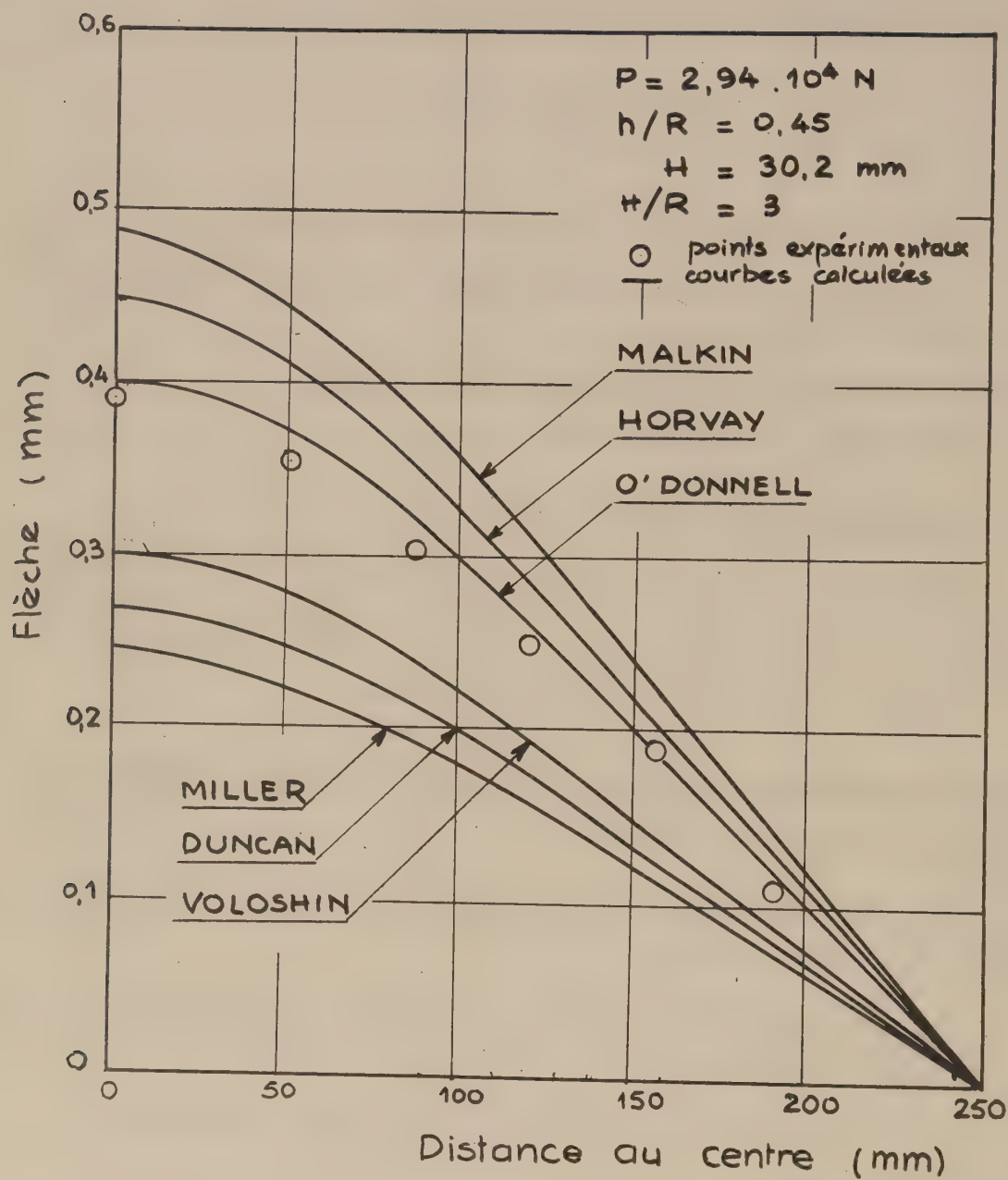


Fig. I - 4,13-1. Comparaison de diverses flèches calculées avec celle mesurée.

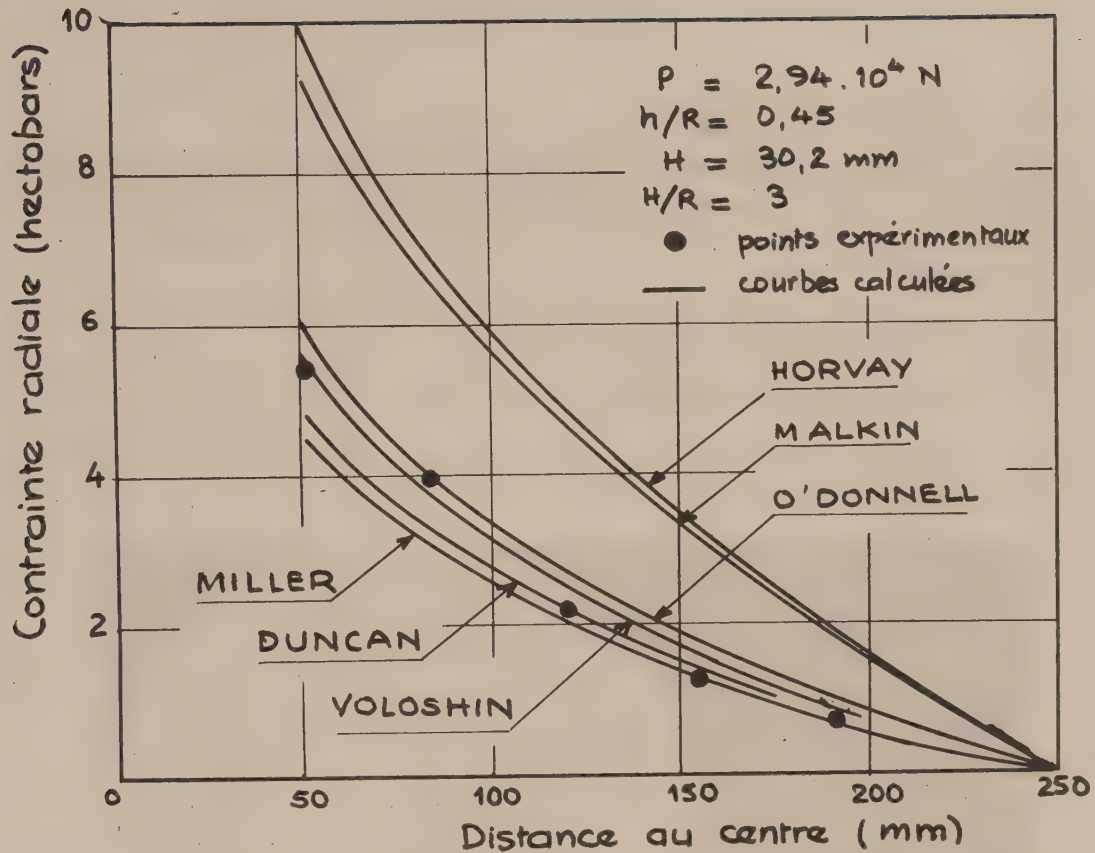


Fig. I-4,13-2. Comparaison des contraintes radiales calculées par diverses théories avec les contraintes mesurées.

Les contraintes maximales calculées par les théories de MILLER, DUNCAN et VOLOSHIN coïncident davantage avec l'expérience.

Notre méthode d'analyse plus rigoureuse, utilisant les constantes d'O'DONNELL, donne le meilleur résultat.

I - 4,14 - Conclusion -

De cette étude, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- La méthode des coefficients de ligament et de déflexion, si elle est simple à utiliser, est peu rigoureuse et, de ce fait, ne permet pas une analyse précise des contraintes et des déformations.

- La méthode des constantes élastiques équivalentes est plus rationnelle, mais les constantes élastiques de HORVAY et de MALKIN ne donnent pas de résultats satisfaisants.

- Les constantes élastiques de O'DONNELL, obtenues à partir des constantes de SAMPSON, mesurées sur du plastique de coefficient de POISSON

$\nu = 0,5$, donnent les résultats les plus concordants.

I - 4,2. INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR .

Pour contrôler le résultat qui consiste à dire que le rapport de rigidité D^*/D varie avec l'épaisseur pour le même perçage h/R , nous allons expérimenter sur des plaques de diverses épaisseurs et comparer les résultats théoriques et expérimentaux.

I - 4,21 - Caractéristiques des plaques (Fig. I-4,21-1) -

Les diverses dimensions sont réunies dans le tableau I-4,21-2.

Toutes les plaques sont identiques à celle décrite dans le § I-4,11, sauf les épaisseurs.

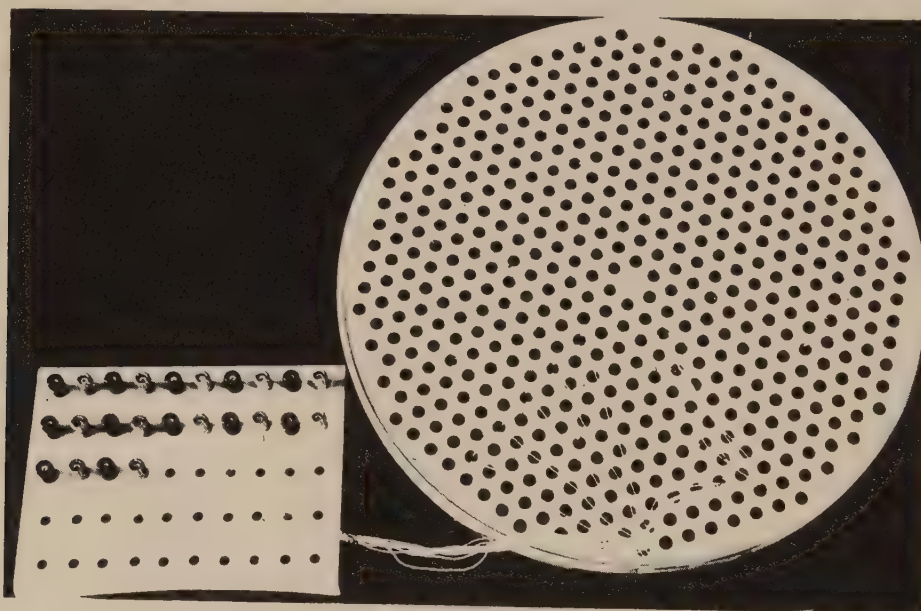


Fig. I - 4,21-1. Plaque percée de nombreux trous.

Tableau I - 4,21-2

Plaque n°	H (mm)	2R (mm)	2r (mm)	h/R	H/R
1	10,2	20	11	0,45	1
2	30,2	20	11	0,45	3
3	40,1	20	11	0,45	4

I - 4,22 - Calculs théoriques -I - 4,221 - Flèches.

La flèche d'une plaque percée appuyée à la périphérie et chargée au centre par une force concentrée P est donnée par ([34] p. 68) :

$$w = \frac{P}{16\pi D^*} \frac{3 + \nu^*}{1 + \nu^*} (a^2 - r^2) + 2r \operatorname{Log} \frac{r}{a} \quad \dots(I-4,22-1)$$

pour $h/R = 0,45$ la figure I-2,3-3.

$$\frac{E^*}{E} = 0,443, \text{ d'où } E^* = 9,11 \cdot 10^3 \text{ hectobars.}$$

$$\nu^* = 0,31$$

avec $2a = 502 \text{ mm}$

$E = 20600 \text{ hectobars.}$

Nous calculons les flèches pour diverses forces P.

Tableau I - 4,22-1

Flèches calculées en mm de la plaque n° 1 $H = 10,2 \text{ mm.}$

Force appliquée N \ distance au centre mm	0	30	70	110	150	190	230
2 940	1,048	1,010	0,849	0,692	0,503	0,306	0,102
3 920	1,400	1,345	1,183	0,925	0,671	0,408	0,136
4 900	1,750	1,680	1,480	1,152	0,840	0,510	0,170

(voir Fig. I-4,24-1)

Tableau I - 4,22-2

Flèches calculées en mm de la plaque n° 2 $H = 30,2 \text{ mm.}$

Force appliquée N \ distance au centre mm	0	30	70	110	150	190	230
14 700	0,205	0,194	0,170	0,138	0,100	0,061	0,021
19 600	0,268	0,259	0,228	0,184	0,133	0,081	0,027
29 400	0,402	0,388	0,341	0,275	0,200	0,122	0,041

(voir Fig. I-4,24-2)

Tableau I - 4,22-3

Flèches calculées en mm de la plaque n° 3, $H = 40,1$ mm .

Force appliquée N \ distance au centre mm	0	30	70	110	150	190	230
19 600	0,115	0,110	0,097	0,079	0,057	0,035	0,012
29 400	0,172	0,167	0,146	0,118	0,085	0,052	0,018

(voir Fig. I-4,24-3)

I - 4,222 - Contraintes -

Les contraintes sont calculées par la même méthode exposée au § I-4,112.

Les jauges utilisées sont des jauges BUDD S.A. Les facteurs de correction K_1 définis au § I-4,112 sont donnés au tableau I-4,22-4.

Tableau I - 4,22-4

Facteurs de correction.

Désignation des jauges	C6 - 121	C6 - 131	C6 - 141
largeur en mm	3,2	4,8	6,4
K_1	0,80	0,82	0,86

Les contraintes ainsi calculées ont pour valeurs :

Tableau I - 4,22-5

Plaque $H = 10,2$ mm $P = 4\,900$ N $h/R = 0,45$ jauges C6-121 $k_1 = 0,80$

Distance au centre (mm)	50	85	120	155	190
σ_r (hectobars)	4,77	3,19	2,17	1,42	0,81
$k_1 R/h \sigma_r$ (hectobars)	8,46	5,10	3,85	2,53	1,45

(voir Fig. I-4,24-4)

Tableau I - 4,22-6

Plaque H = 30,2 mm P = 29 400 N h/R = 0,45 jauges C6-131 $k_1 = 0,82$

Distance au centre (mm)	50	85	120	155	190
σ_r (hectobars)	3,26	2,19	1,49	0,98	0,56
$k_1 R/h \sigma_r$ (hectobars)	5,94	3,97	2,71	1,76	1,02

(voir Fig. I-4,24-5)

Tableau I - 4,22-7

Plaque H = 40,1 mm P = 29 400 N h/R = 0,45 jauges C6-141 $k_1 = 0,86$

Distance au centre (mm)	50	85	120	155	190
σ_r (hectobars)	1,81	1,21	0,83	0,54	0,31
$k_1 R/h \sigma_r$ (hectobars)	3,46	2,44	1,58	1,03	0,58

(voir Fig. I-4,24-6)

I - 4,23 - Essais effectués et résultats expérimentaux -

I - 4,231 - Flèches -

Tableau I - 4,23-1

Plaque H = 10,2 mm

force appliquée / distance au centre des comparateurs (mm)	0	52	87	121	156	191
2 940	0,95	0,87	0,75	0,63	0,47	0,31
3 920	1,25	1,14	0,98	0,83	0,53	0,41
4 900	1,59	1,38	1,25	1,00	0,67	0,51

(voir Fig. I-4,24-1)

Tableau I - 4,23-2

Plaque H = 30,2 mm

force appliquée N \ distance au centre des comparateurs (mm)	0	52	87	121	156	191
14 700	0,195	0,175	0,160	0,135	0,090	0,045
19 600	0,269	0,234	0,212	0,180	0,120	0,060
29 400	0,392	0,355	0,304	0,248	0,189	0,107

(voir Fig. I-4,24-2)

Tableau I - 4,23-3

Plaque H = 40,1 mm

force appliquée N \ distance au centre des comparateurs (mm)	0	52	87	121	156	191
19 600	0,120	0,108	0,100	0,075	0,061	0,035
29 400	0,180	0,160	0,146	0,120	0,092	0,051

(voir Fig. I-4,24-3)

I - 4,232 - Contraintes -

Tableau I - 4,23-4

Plaque H = 10,2

P = 4 900 N

distance des jauges au centre de la plaque en mm	ϵ_r (μD)	ϵ_t (μD)	σ_r (hectobars)
51,9	390	79	9,33
86,6	260	65	6,32
121,2	172	60	4,31
155,9	97	56	2,58
190,5	36	48	1,14

(voir Fig. I-4,24-4)

Plaque $H = 30,2 \text{ mm}$ $P = 29\,400 \text{ N}$ (voir tableau I-4,12-5)

Tableau I - 4,23-5

Plaque $H = 40,1 \text{ mm}$ $P = 29\,400 \text{ N}$

distance des jauges au centre de la plaque en mm	$\varepsilon_r (\mu D)$	$\varepsilon_t (\mu D)$	σ_r (hectobars)
51,9	158	15	3,68
86,6	110	5	2,52
121,2	66	3	1,51
155,9	42	2	0,96
190,5	13	0	0,29

(voir Fig. I-4,24-6)

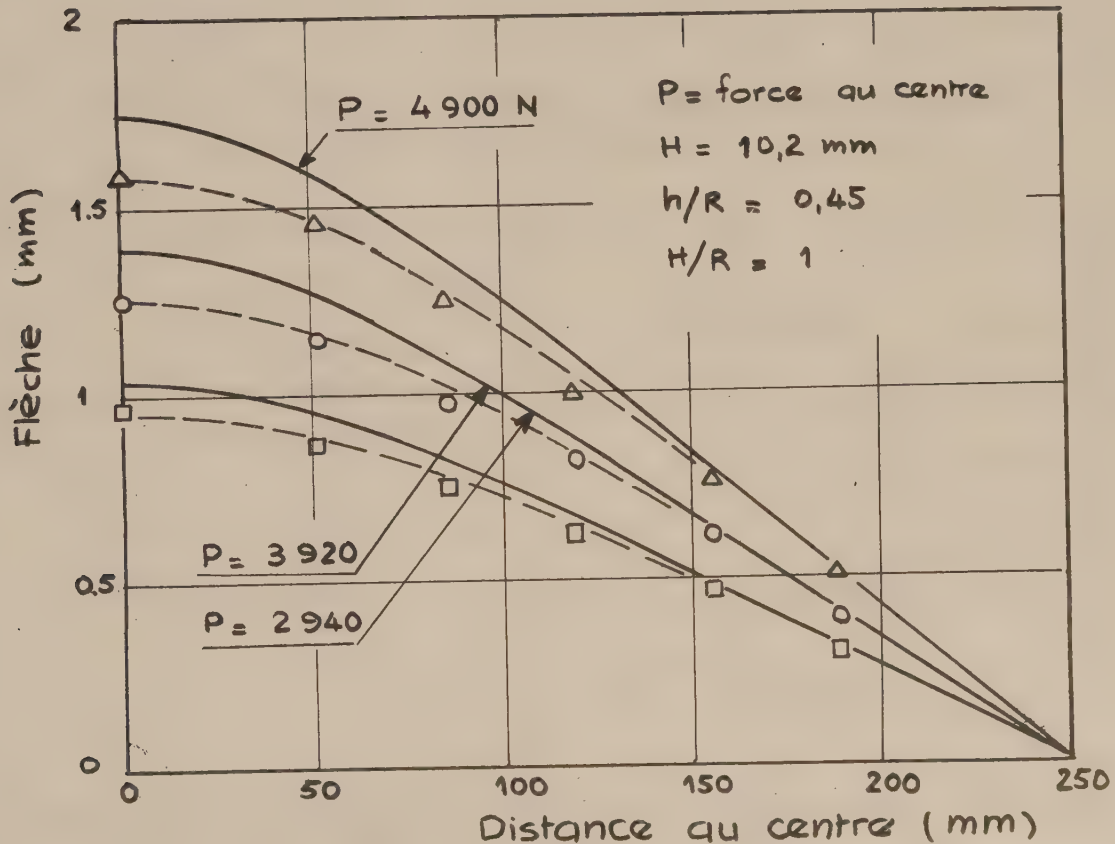
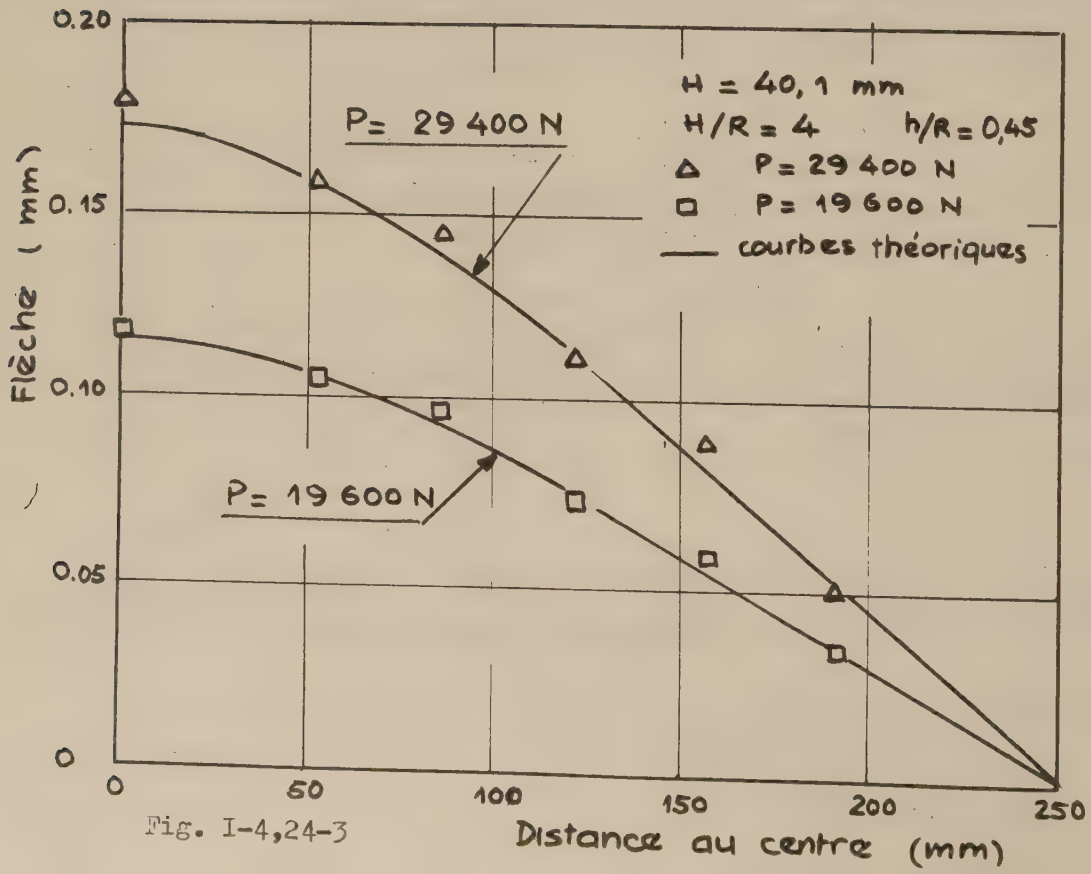
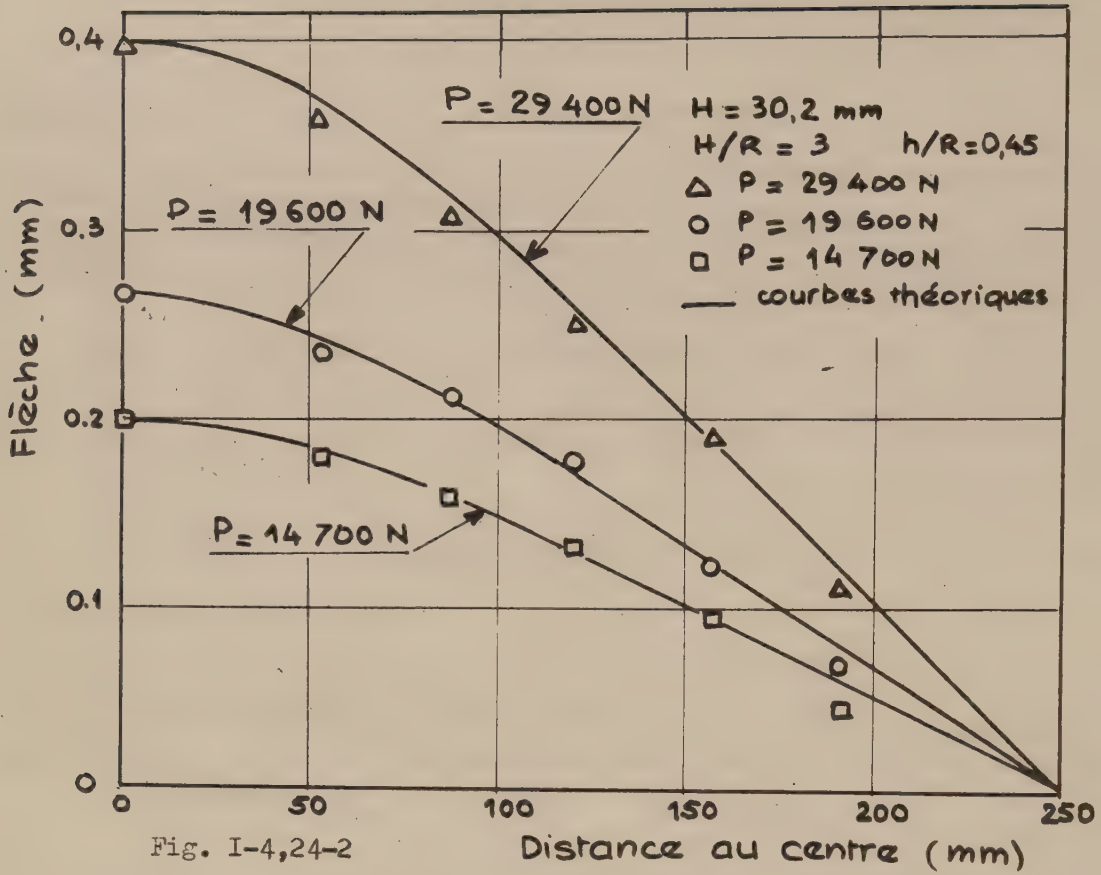
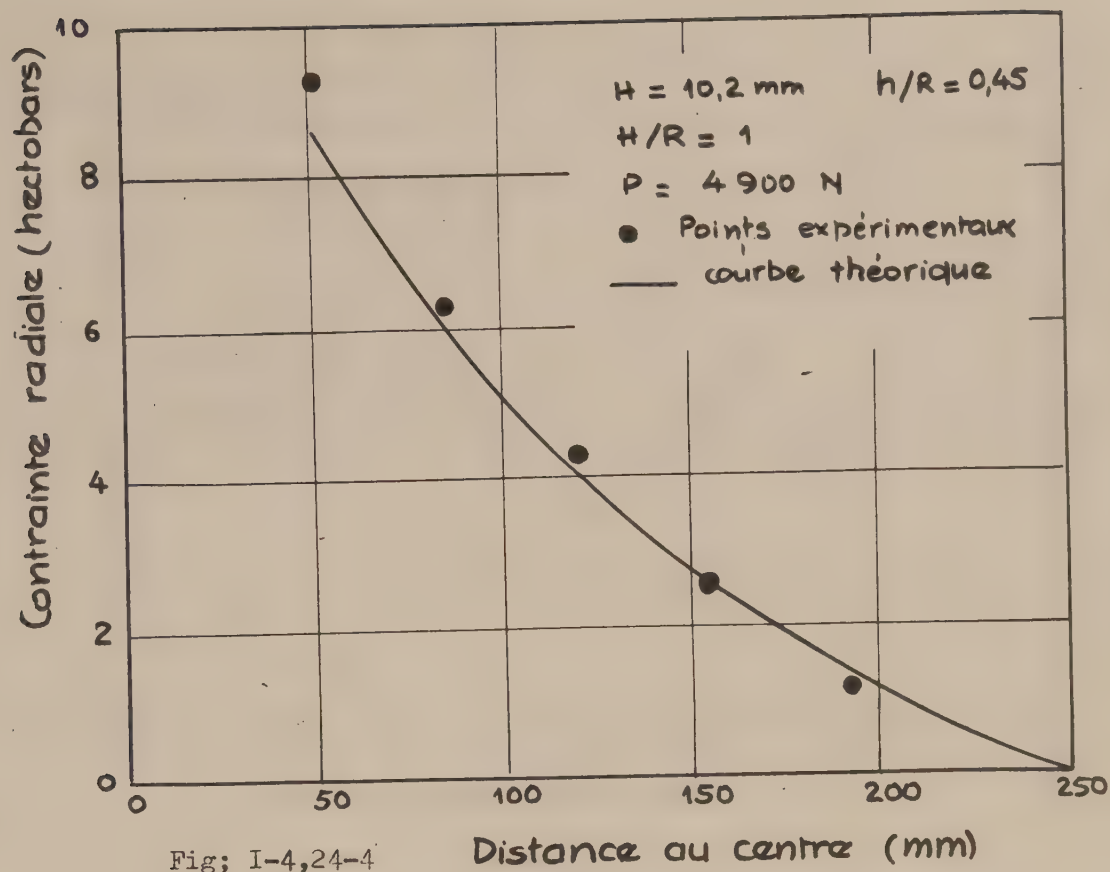


Fig. I - 4,24-1. Flèche le long d'un rayon.

- Δ Points expérimentaux $P = 4\,900 \text{ N}$ ——— Courbes théoriques
- $\circ$ Points expérimentaux $P = 3\,920 \text{ N}$ --- Courbes expérimentales
- $\square$ Points expérimentaux $P = 2\,940 \text{ N}$





Fig; I-4,24-4

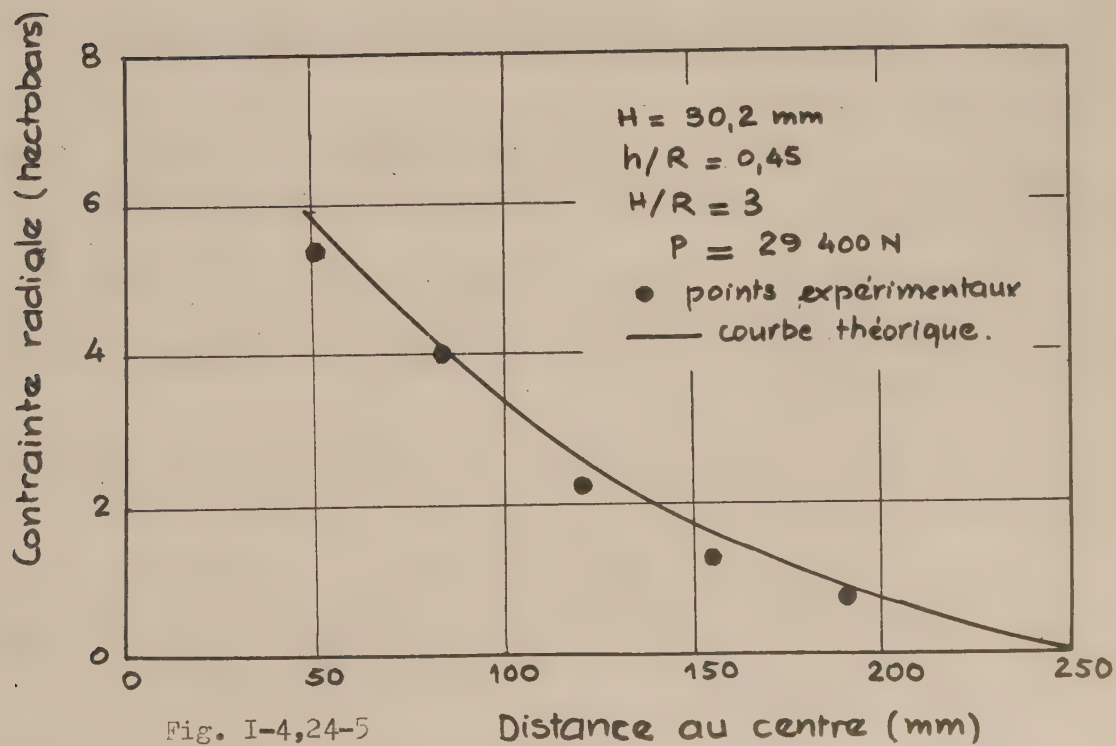


Fig. I-4,24-5

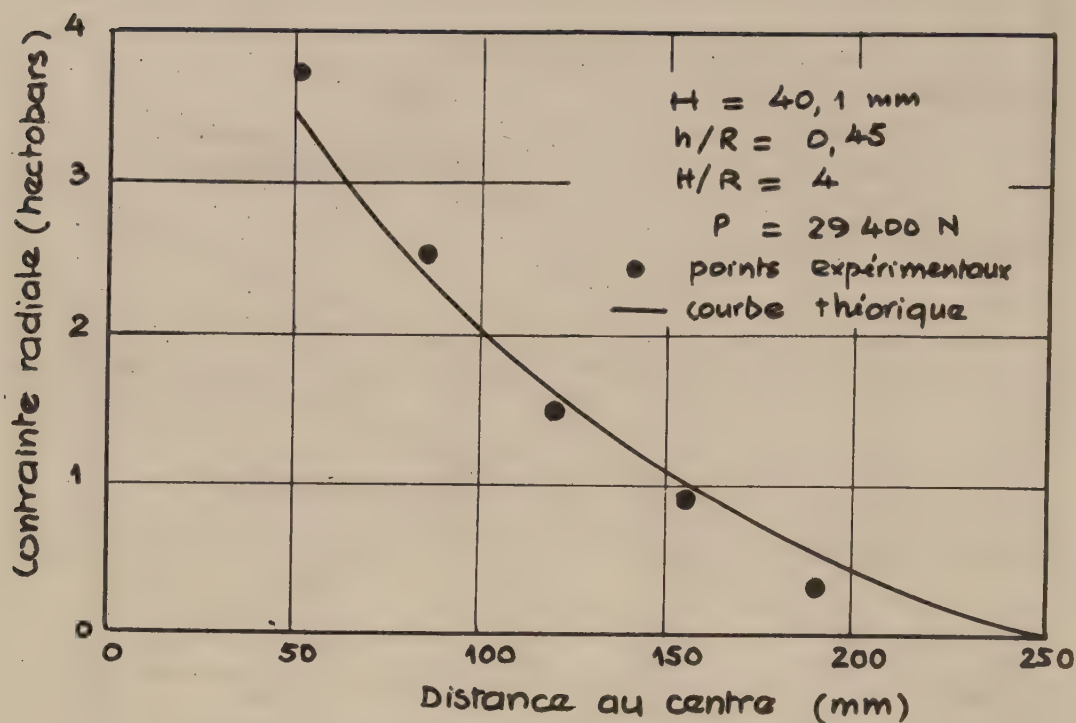


Fig. I - 4,24-6. Contrainte radiale le long d'un rayon.

I - 4,24 - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux -

I - 4,241 - Flèches -

Les flèches calculées et mesurées pour diverses plaques sont portées sur les mêmes graphiques pour comparaison (Fig. I-4,24-1-2 et 3). Nous constatons que :

- pour la plaque $H = 10,2 \text{ mm}$, la flèche mesurée est plus faible que la plaque calculée de 10 %. Ceci confirme nos connaissances expérimentales antérieures, à savoir que pour les plaques minces, on a $(D^*/D)_{\text{mince}} < (D^*/D)_{\text{épaisse}}$ pour le même perçage h/R .

- pour les plaques $H = 30,2 \text{ mm}$ et $H = 40,1 \text{ mm}$, classées dans la catégorie plaque "épaisse", au sens d'O'DONNELL, les flèches calculées et mesurées coïncident à 5 %.

Dans la pratique, on a $H/R > 4$. On peut donc dire que l'on sait calculer les flèches des plaques perforées à 5 %.

I - 4,242 - Contraintes -

Les contraintes calculées et mesurées sont portées aux

Fig. I-4, 24-4-5 et 6. les mesures et les expériences coïncident à 5 % pour toutes les plaques.

I - 5. C O N C L U S I O N .

On peut conclure que avec les connaissances actuelles, on peut calculer les flèches et les contraintes des plaques percées sans tubes avec une précision suffisante en vue des applications industrielles.

2ème PARTIE

INFLUENCE DU DUDGEONNAGE DES TUBES SUR LA CONTRAINTES ET LA RIGIDITE.

Jusqu'à présent, pour calculer les plaques percées avec tubes dudgeonnés, la plupart des auteurs ont négligé la présence des tubes [1], [7], [16]. Peu d'études ont été faites à ce sujet. Dans le présent chapitre, nous allons étudier comment les contraintes induites, dues au dudgeonnage, influencent l'état de contraintes dans la plaque et dans quelle mesure la présence des tubes contribue à rigidifier celle-ci.

Tandis que l'influence des tubes sur la rigidité est une notion précise (variation de flèche d'une plaque avec tubes par rapport à une autre plaque identique, mais sans tubes), l'influence des contraintes induites dues au dudgeonnage est une notion plus complexe.

En ce qui concerne l'influence du dudgeonnage sur l'état de contrainte, il faut signaler 2 phénomènes :

- l'influence des contraintes induites,
- l'influence de l'épaisseur des tubes.

Nous allons préciser ces 2 notions :

- 1) Le dudgeonnage crée des contraintes induites résiduelles.

A l'état naturel, c'est-à-dire lorsque la plaque est sans chargement extérieur, il existe une contrainte de compression entre tube et plaque et une contrainte tangentielle autour du trou. Lorsque la plaque est chargée par des forces extérieures, le problème est de savoir comment ces contraintes induites modifient l'état de contrainte dû à ce chargement extérieur, c'est-à-dire celui d'une plaque identique percée au diamètre intérieur des tubes.

- 2) La présence des tubes augmente la largeur minimale de ligament. Si $2h$ est la largeur des ligaments et t l'épaisseur des tubes, la largeur minimale des ligaments devient $2h + 2t$. D'après la Fig. I-3,33-1, on voit que le facteur de majoration de contrainte diminue. On peut dire que la présence des tubes contribue à diminuer la contrainte maximale.

II - 1. GENERALITES SUR LE DUDGEONNAGE
CONSTRAINTES INDUITES .

Pour tenter d'élucider le problème de l'influence des tubes, nous allons commencer par étudier la théorie du dudgeonnage.

II - 1,1. PROCESSUS DU DUDGEONNAGE ..

Le dudgeonnage est une opération qui consiste à introduire librement l'extrémité d'un tube dans un trou d'une plaque et à la dilater plastiquement par un outil à galets appelé dudgeon [20]. On a ainsi appliqué une pression à l'intérieur du tube. Lorsqu'on supprime cette pression, le tube reste fortement serré contre la plaque.

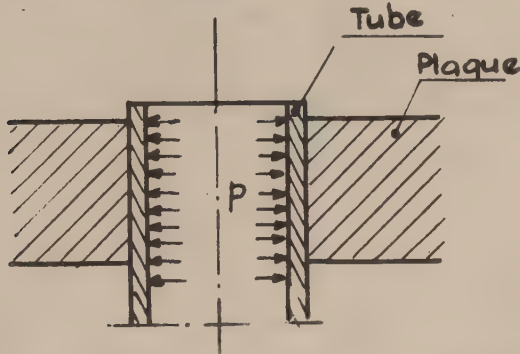


Fig. II-1,1-1. Dudgeonnage des tubes.

Les principales qualités d'un tel assemblage sont l'étanchéité et la résistance mécanique.

L'étanchéité aux fuites dépend de l'état des surfaces de contact entre tube et plaque, de l'uniformité du processus de dilatation et de la pression résiduelle interfaciale.

La résistance mécanique à la traction, à la flexion et à la torsion dépend du frottement de l'assemblage. Ce frottement dépend des états

de surface et de la pression résiduelle entre tube et plaque. Des études ont été faites pour obtenir cette pression radiale maximale, soit théoriquement par GOODIER et SCHOESSOW [18] et par NADAI [26], soit expérimentalement par GRILISON et LEE [19], et par ALEXANDER et FORD [23].

Au début de la dilatation, les déformations sont élastiques. Dans ces conditions, les déformations radiales et tangentielles sont en tout point égales en amplitude, mais de signes contraires. Elles diminuent lorsqu'on s'éloigne du trou.

Quand la pression atteint une certaine valeur, les déformations deviennent permanentes. On a une zone plastique qui se développe autour du trou.

Nous allons étudier analytiquement ces phénomènes pour pouvoir ensuite déterminer la distribution de contraintes résiduelles autour du trou.

II - 1,2. DISTRIBUTION DE CONTRAINTES DANS UNE PLAQUE INFINIE AYANT UN TROU LORSQU'ON APPLIQUE UNE PRESSION UNIFORME p A L'INTERIEUR DU TROU.

Lorsque la pression p est faible, la plaque se déforme élastiquement et les contraintes radiales et tangentielles sont : (Fig. II-1,2-1)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p \frac{a^2}{r^2} \\ \sigma_t &= +p \frac{a^2}{r^2} \end{aligned} \quad \dots(\text{II-1,2-1})$$

Lorsque la pression p atteint une certaine valeur, une zone plastique commence à prendre naissance au bord du trou. Et lorsqu'elle dépasse cette

limite, on a une zone plastique au-delà de c . (Fig. II-1,2-2). La distribution de contraintes dans la zone plastique a été établie par NADAI [27]. Pour des raisons de commodité dans les calculs, l'auteur a supposé applicable la loi d'écoulement plastique de VON MISES et HENCKY [39].

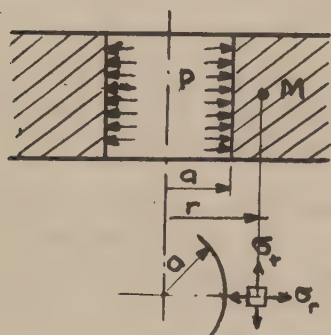


Fig. II-1,2-1

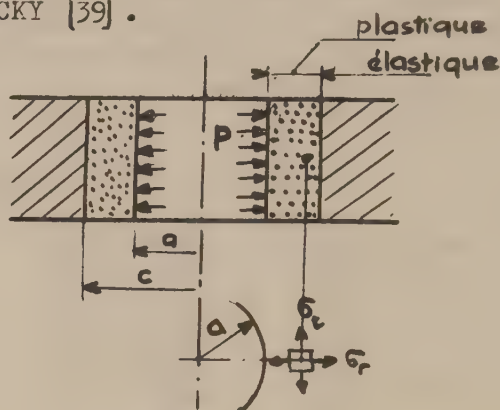


Fig. II-1,2-2

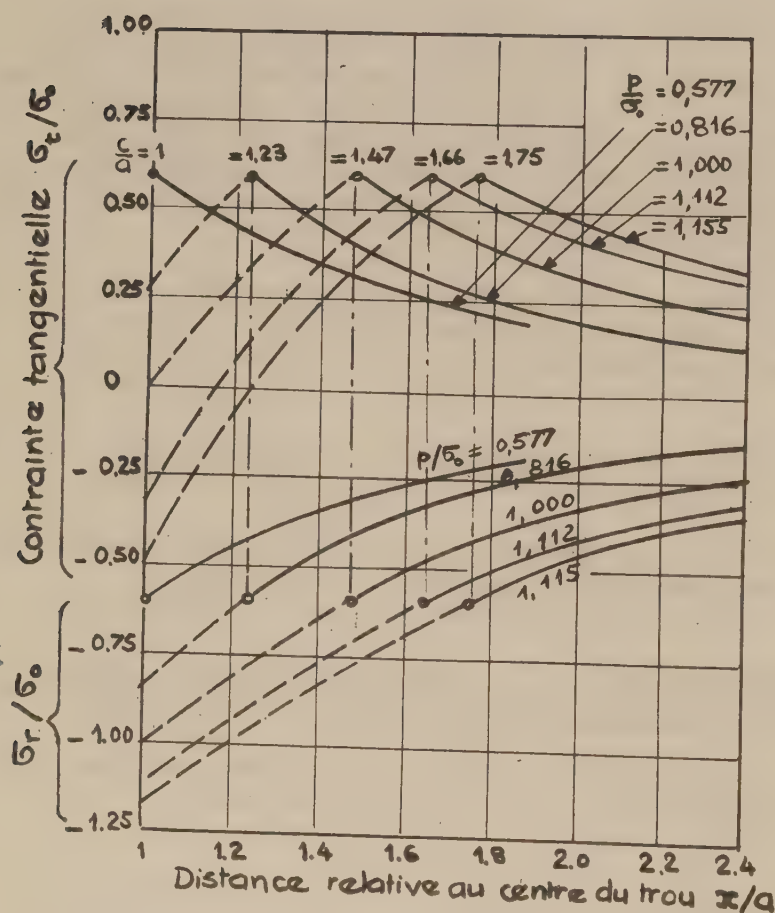


Fig. II-1,2-3. Distribution de contrainte dans une plaque d'acier ayant un trou, lorsqu'on applique une pression p à la surface intérieure du trou (σ_0 : limite élastique).

--- zone plastique
— zone élastique

La distribution de contraintes ainsi calculée est approximative et dépend de la loi d'écoulement plastique choisie. Le système de contraintes radiale et tangentielle est donné à la Fig. II-1,2-3.

L'examen des courbes de la Fig. II-1,2-3 montre que :

- lorsque $p < 0,577 \sigma_0$ les déformations sont purement élastiques.
- lorsque $p = 0,577 \sigma_0$ les déformations plastiques commencent au bord du trou.
- lorsque p continue à augmenter la zone plastique s'élargit.
- lorsque $p = 1,155 \sigma_0$, toute tentative d'accroissement de métal dans le sens de l'axe dans l'hypothèse d'une contrainte plane, le rayon de la zone plastique correspondante qui est $c = 1,75 a$, cesse d'augmenter. Il est inutile d'augmenter la pression au-delà de cette limite.

Des études expérimentales faites par TRILISON et LEE [19] sur des tubes de diamètre 82,55 mm et d'épaisseur 4,32 mm - 7,36 mm - 10,92 mm - 12,70 mm montrent que les scories de laminage s'écaillent sur des distances 15,24 mm - 15,24 mm - 12,70 mm - 15,24 mm. Les diamètres de la zone plastique ainsi évalués sont par rapport au diamètre intérieur du tube de 1,53 - 1,67 - 1,78 et 1,98 fois ce diamètre, chiffre à comparer avec la limite théorique 1,75 et montrant le caractère approximatif de la loi de plasticité retenue pour les calculs.

II - 1,3. CONTRAINTES RESIDUELLES .

De l'étude précédente, on peut déduire les contraintes résiduelles à la manière suivante :

Nous considérons le cas le plus simple, où il n'y a pas de jeu et où le tube et la plaque sont constitués du même matériau. On peut alors les traiter comme une seule pièce de métal, c'est à dire une plaque infinie ayant un trou de diamètre égal au diamètre intérieur du tube.

Nous considérons d'autre part le cas où la pression intérieure est égale à la pression limite $p = 1,155 \sigma_s$ (Fig. II-1,2-3).

Nous supposons que les déformations et les contraintes sont purement élastiques pendant la décroissance de la pression conformément à la théorie de l'é-crouissage.

Pour déterminer les contraintes résiduelles subsistant après suppression de la pression dans le trou, il suffit de superposer dans le trou, une contrainte de traction égale produisant des courbes élastiques ABC et A'B'C' (Fig. II-1,3-1). Ce sont respectivement des contraintes de traction et de compression. Elles sont inversées pour montrer les contraintes qui subsistent, quand elles sont superposées aux précédentes.

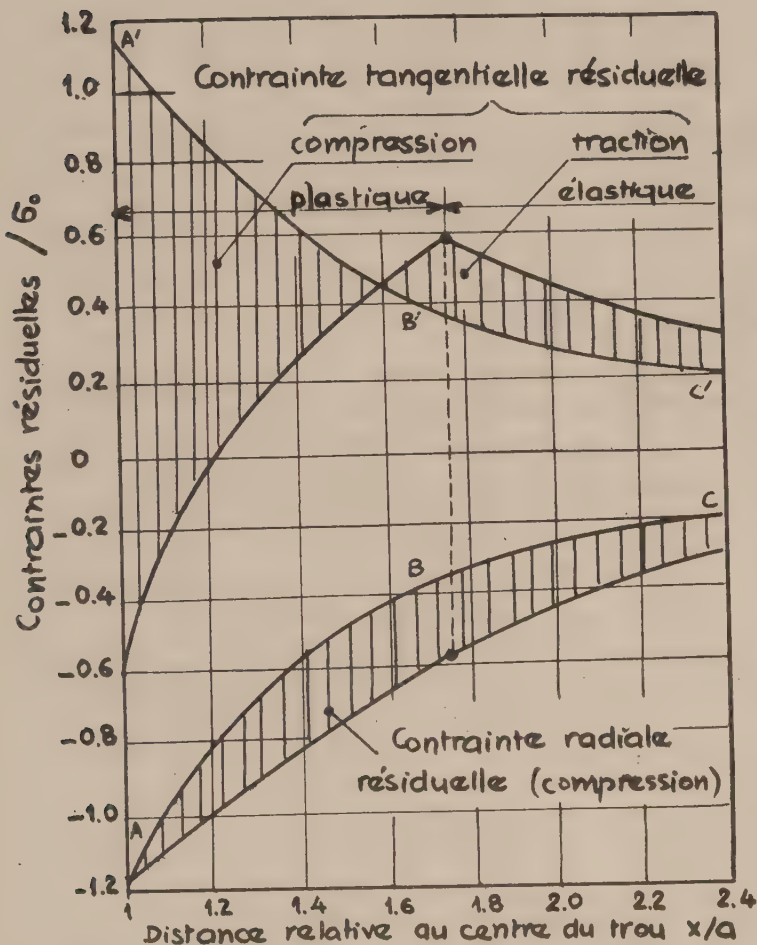


Fig. II-1,3-1. Contraintes radiale et tangentielle résiduelles dans une plaque d'acier ayant un trou, lorsqu'on applique une pression $p = 1,155 \sigma_s$ à l'intérieur du trou où σ_s est la limite élastique en traction de l'acier.

Nous avons ainsi visualisé les contraintes résiduelles : ce sont des segments compris entre deux courbes (zones hachurées) .

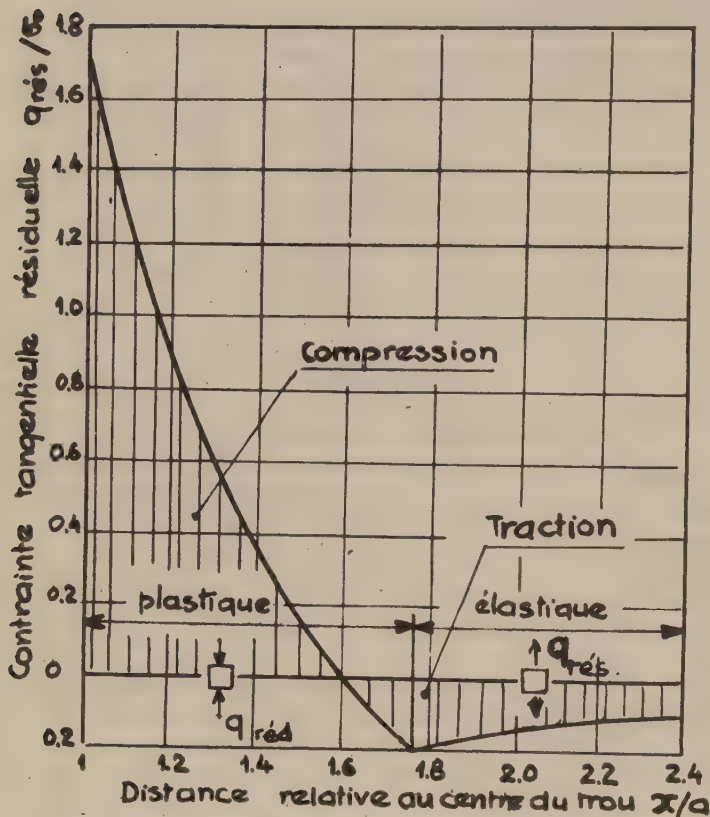


Fig. II-1,3-2. Contrainte tangentielle résiduelle en fonction de la distance du bord du trou.

On peut alors tracer les courbes des contraintes tangentielle et radiales résiduelles (Fig.II-1,3-2-3).

L'examen de courbes montre que :

- la contrainte radiale résiduelle est maximale au rayon $x = 1,45 a$ et a pour valeur $0,245\sigma$. Elle est toujours de compression.
- la contrainte tangentielle résiduelle est une compression jusqu'au rayon $1,6 a$, et une traction au-delà de cette valeur.

La valeur maximale $1,86\sigma$ au trou dépasse la limite plastique de $1,155\sigma$. La récupération est élastique jusqu'à ce que la contrainte tangentielle atteigne $1,155\sigma$; ensuite la récupération devient inélastique.

Pour trouver la pression résiduelle entre tube et plaque, il suffit de prendre l'ordonnée de la courbe de la fig. II-1,3-3, au point d'abscisse correspondant au diamètre extérieur du tube.

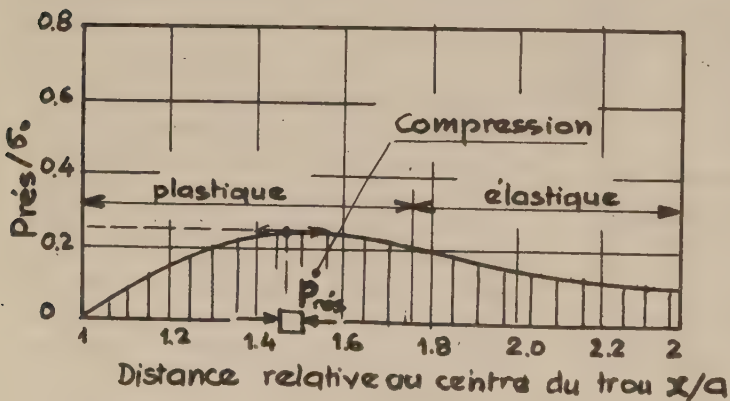


Fig. II-1,3-3. Contrainte radiale résiduelle en fonction de la distance du bord du trou.

Nous pouvons faire la même étude pour un dudgeonnage moyen ($p = \sigma$) nous obtenons les systèmes de contraintes résiduelles représentés sur la Fig. II-1,3-4. a. b et c.

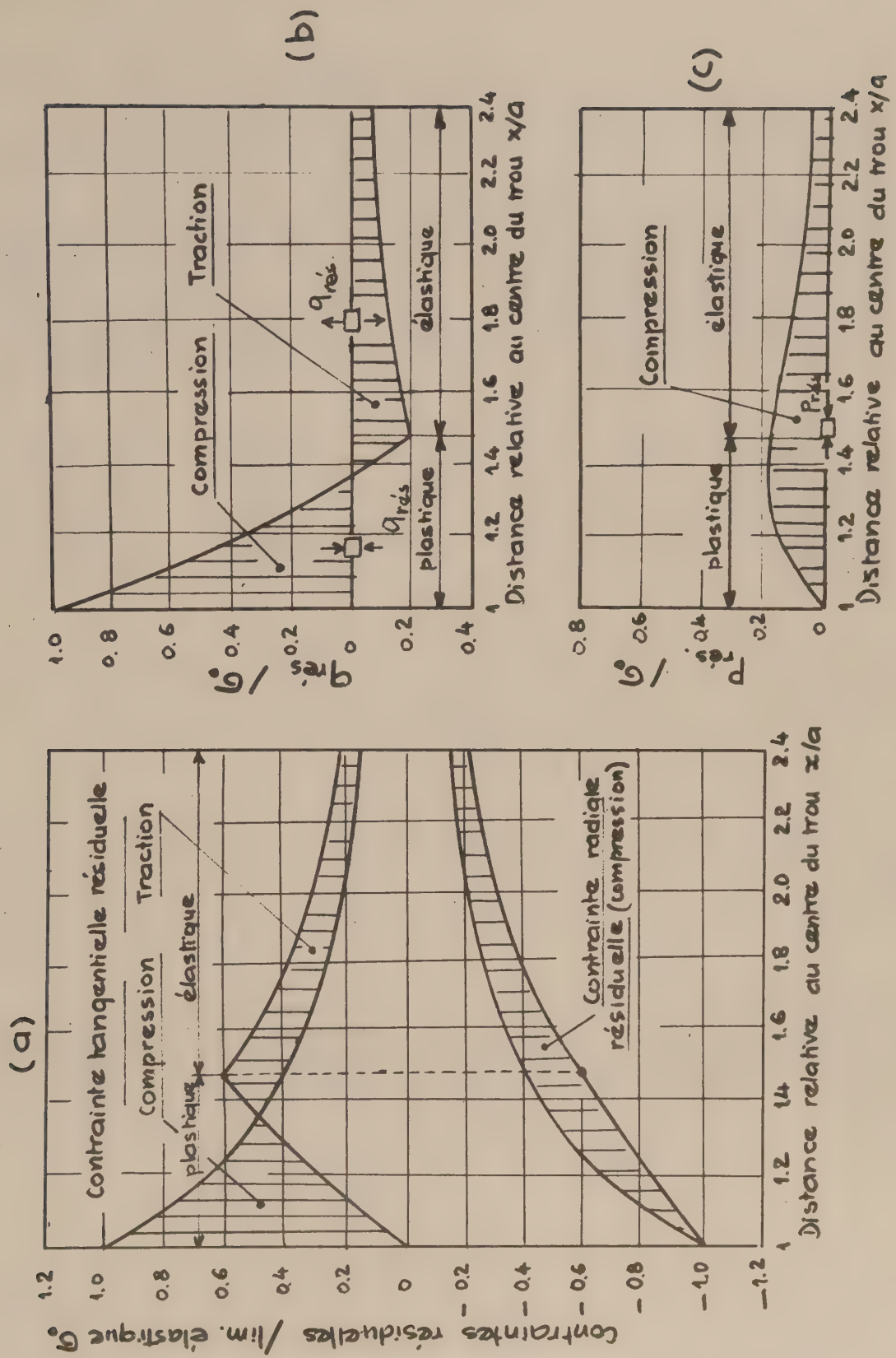


Fig. II - 1,3 - 4

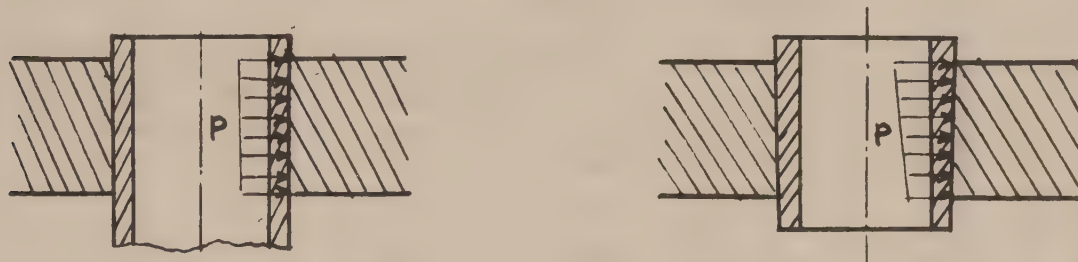
II - 2. EFFET DE RAIDISSEMENT DU A LA PRESENCE DES TUBES.

Pour mettre en évidence l'effet de raidissement dû à la présence des tubes, nous allons mesurer les constantes élastiques équivalentes E^* et ν^* d'une plaque percée sans tubes (déjà fait voir chapitre I - 2) et $\bar{E}^*$ et $\bar{\nu}^*$ modifiées dues à la présence des tubes. Ces résultats permettent de calculer les rigidités correspondantes $D^* = E^* H^3 / 12 (1 - \nu^{*2})$ et de chiffrer l'effet de raidissement.

II - 2,1. BASE DE L'ETUDE EXPERIMENTALE -

L'étude théorique du processus du dudgeonnage (§ II-1,1) permet d'avancer des hypothèses importantes :

1°) La pression résiduelle entre tube et plaque est obtenue dans le cas du dudgeonnage réel par une récupération élastique du siège de la plaque après dilatation mécanique du tube. Cette pression peut être obtenue dans la présente expérience en emmanchant un tube légèrement conique dans un trou en déformation élastique. Il y a une analogie mécanique entre ces 2 cas. Mais tandis que dans un dudgeonnage réel, la répartition théorique de la pression est uniforme, la répartition de la pression dans la simulation du dudgeonnage est linéaire (Fig. II-2,1-1).



(a) Dudgeonnage réel -
Répartition théorique
uniforme de la pression.

(b) Simulation du dudgeonnage -
Répartition linéaire de la
pression.

Fig. II-2,1-1

2°) Dans l'étude théorique, nous avons supposé le tube et la plaque de même matériau. L'étude expérimentale par GRIMISON et LEE [19] a montré qu'on aurait un meilleur résultat si on prenait le matériau du tube moins dur que celui de la plaque. Dans notre expérience, nous avons pris des tubes en Lucoflex de module d'YOUNG 294 hectobars et des plaques en araldite de module d'YOUNG 336 hectobars.

3°) L'épaisseur des tubes a évidemment une influence sur l'effet de raidissement. Ici, nous ferons l'expérience avec des tubes de rapport $2b/2a = 1,27$ le plus couramment utilisé ($2b$: diamètre extérieur du tube, $2a$: diamètre intérieur).

II - 2,2. CARACTERISTIQUES DES PLAQUES ET DES TUBES -

II - 2,21 - Bandes perforées -

Ce sont les mêmes que précédemment utilisées pour la mesure de E^* et ν^* sans tubes (§ I-2,21-1).

II - 2,22 - Tubes -

Les tubes sont en lucoflex de module d'YOUNG 294 hectobars. Le plus petit diamètre extérieur $2b$ correspond au diamètre $2r$ des trous percés

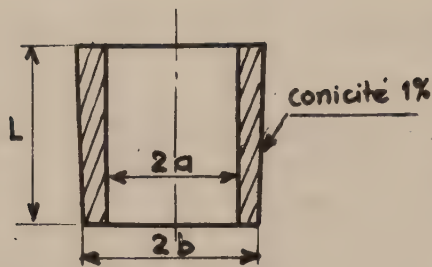


Fig. II - 2,22-1

dans la plaque (Fig. II-2,22-1). Les diverses dimensions sont données au tableau II-2,22-2.

Le degré d'enfoncement des tubes est contrôlé par le comparateur, la face de référence est celle de la plaque.

Les tubes sont usinés avec une précision de 0,01 mm.

Tableau II - 2,22-2

h/R	$2r$ (mm)	$2b$ (mm)	b/a	$2a$ (mm)	L (mm)	Conicité %
0,50	10	10	1,27	7,9	13	1
0,35	13	13	1,27	10,2	13	1
0,25	15	15	1,27	11,8	13	1
0,15	17	17	1,27	13,4	13	1

II - 2,3. RESULTATS EXPERIMENTAUX -

Bandes perforées avec tubes :

Nous avons mesuré les constantes élastiques équivalentes $\bar{E}^*$ et $\bar{\nu}^*$ modifiées par la présence des tubes pour divers degrés d'enfoncement. Nous avons constaté au cours de nos expériences que :

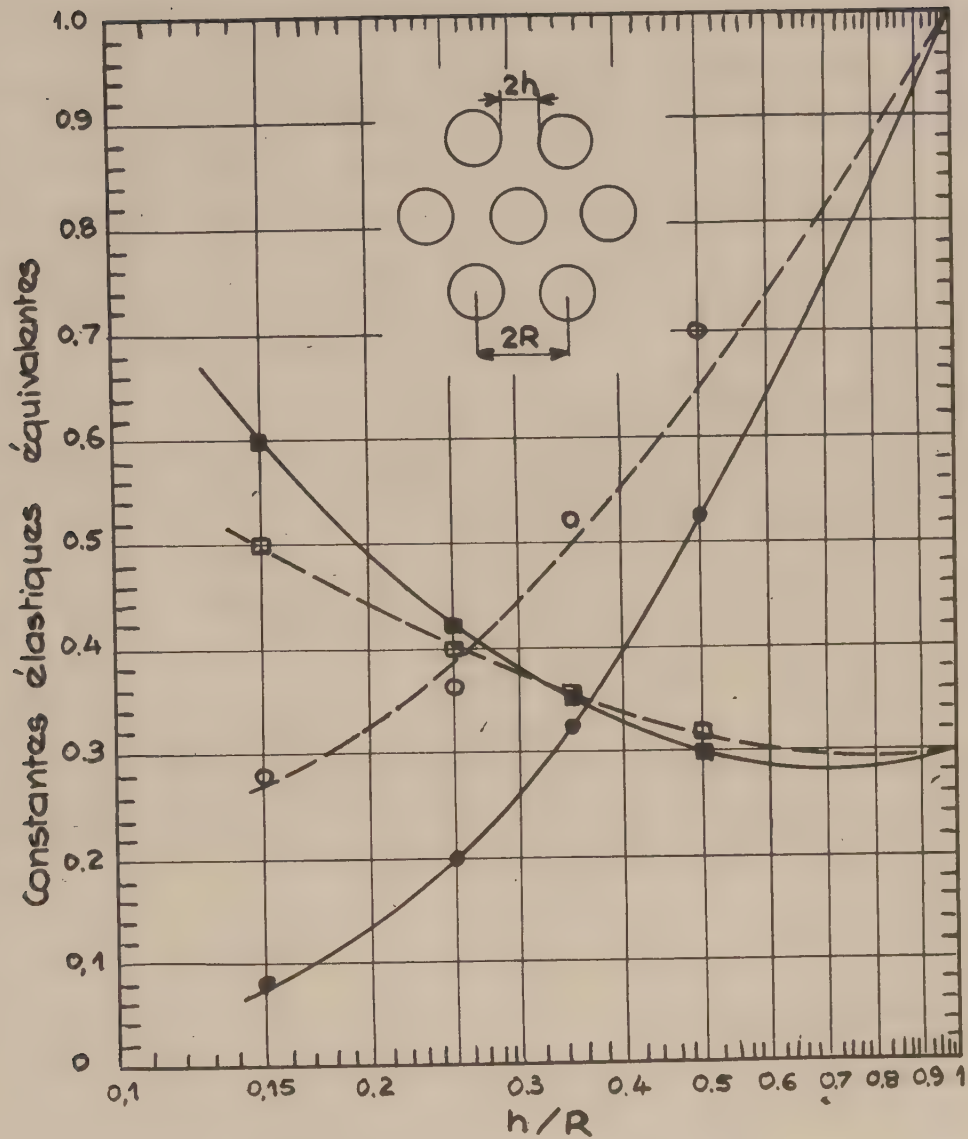
- lorsque nous augmentons progressivement le degré d'enfoncement, c'est à dire la pression entre tube et plaque, les valeurs de $\bar{E}^*$ augmentent tandis que celles de $\bar{\nu}^*$ diminuent, ceci pour le même perçage de h/R .

- les valeurs de $\bar{E}^*$ et $\bar{\nu}^*$ cessent de varier lorsque la pression dépasse un certain seuil, défini par la longueur de tube à l'extérieur du trou par rapport à la face de référence. A partir de cette valeur d'enfoncement, nous avons relevé les valeurs de $\bar{E}^*$ et $\bar{\nu}^*$, rassemblées dans le tableau II-2,3-1.

La méthode de mesure est identique à celle décrite au § I-2,2.

L'erreur relative des mesures est la même que celle calculée au § I-2,4.

Les constantes élastiques équivalentes mesurées sans tubes E^* et ν^* (tableau I-2,3-2) et celles mesurées avec tubes $\bar{E}^*$ et $\bar{\nu}^*$ (tableau II-2,3-1) sont portées sur la même figure II-2,3-2.



— Courbes expérimentales sans tubes.
 - - - Courbes expérimentales modifiées par la présence des tubes.
 • E^*/E } Points expérimentaux sans tubes.
 ■ ν^* }
 ○ E^*/E } Pts exp. avec tubes.
 □ ν^* }

Fig. II - 2,3-2. Modifications des constantes élastiques équivalentes par la présence des tubes.

Tableau II - 2,3-1
Constantes élastiques modifiées par
la présence des tubes.

h/R	E_p^* (hectobars)	ν_p^*	E^*/E	ν^*
0,50	238	0,345	0,70	0,320
0,35	177	0,370	0,53	0,350
0,25	122	0,421	0,36	0,401
0,15	94,2	0,504	0,28	0,495

(voir Fig. II-2,3-2)

II - 2,4. EFFET DE RAIDISSEMENT -

Pour pouvoir comparer et interpréter les résultats, nous calculons la rigidité D^* des plaques percées sans tubes et $\bar{D}^*$ la rigidité des mêmes plaques percées avec tubes.

Soit D , la rigidité de la plaque pleine, $D = \frac{E H^3}{12(1-\nu^2)}$

$$\text{on a : } \frac{D^*}{D} = \frac{E^*}{E} \frac{(1-\nu^2)}{(1-\nu^{*2})} \quad \text{et} \quad \frac{\bar{D}^*}{D} = \frac{\bar{E}^*}{E} \frac{(1-\nu^2)}{(1-\bar{\nu}^{*2})}$$

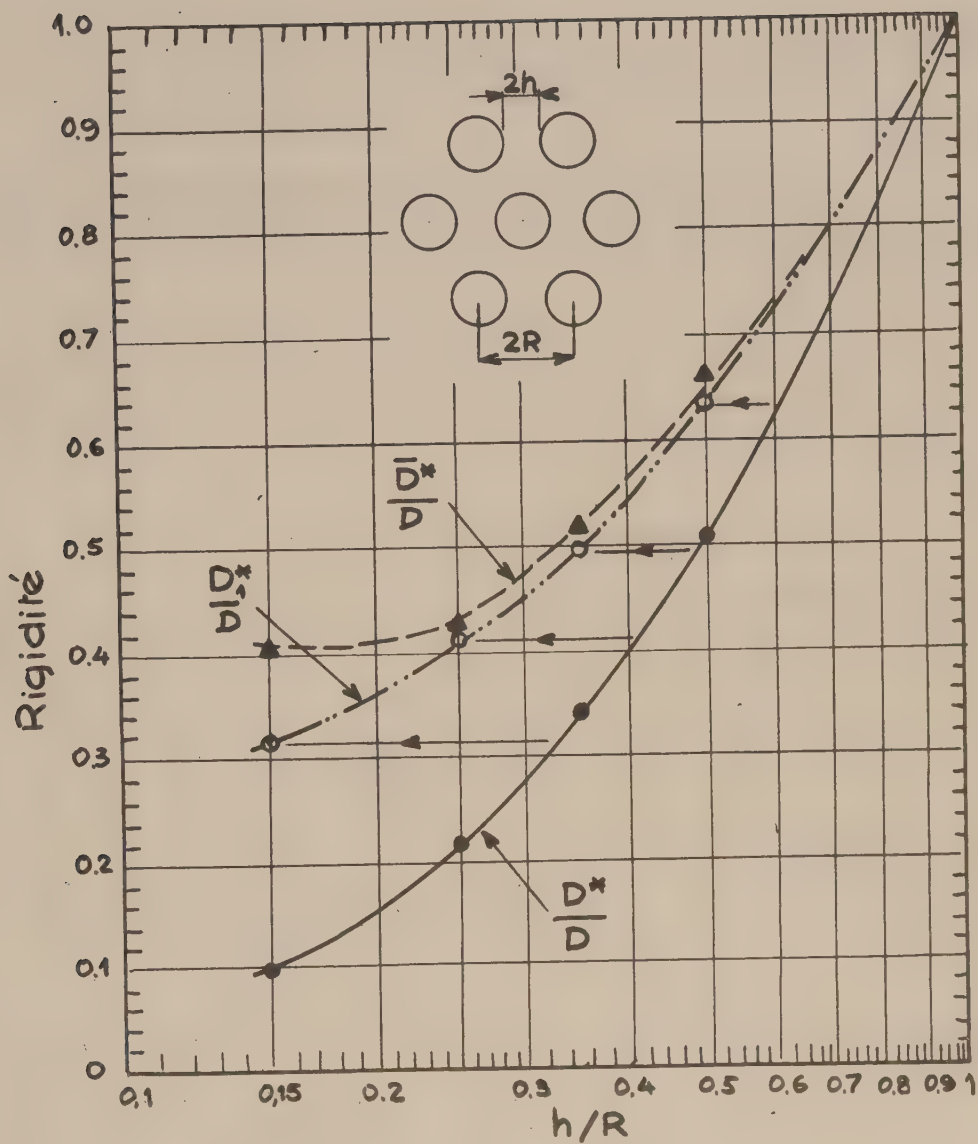
Les valeurs de E^*/E , $\bar{E}^*/E$, ν^* et $\bar{\nu}^*$ sont obtenues à partir de la Fig. II-2,3-2. Les résultats sont rassemblés dans le même tableau II-2,4-1. Dans ce même tableau, nous avons donné également la rigidité D_1^* correspondante, lorsque l'on suppose les tubes faisant partie de la plaque.

Tableau II - 2,4-1

h/R	D^*/D	$\bar{D}^*/D$	D_1^*/D
0,5	0,510	0,660	0,640
0,35	0,336	0,527	0,498
0,25	0,222	0,428	0,418
0,15	0,098	0,410	0,316

Les diamètres intérieurs des tubes 2a, donnés au tableau II-2,22-2, permettent de calculer les h/R correspondants qui, pour les diamètres percés 10 - 13 - 15 - 17, deviennent respectivement 0,6 - 0,49 - 0,42 et 0,33.

Les courbes des rigidités en fonction de h/R sont données à la Fig. II-2,4-2.



D : rigidité de la plaque pleine.
 D^* : rigidité de la plaque percée sans tubes.
 $\bar{D}$: rigidité de la plaque percée avec tubes.
 D^* : rigidité de la plaque percée au diamètre intérieur des tubes.

Fig. II - 2,4-2. Courbes des rigidités en fonction de h/R .

La rigidité de la plaque percée avec tubes est sensiblement égale à celle de la plaque percée au diamètre intérieur des tubes pour $0,25 < h/R < 1$.

L'écart est plus net pour $h/R < 0,25$, c'est-à-dire lorsque le perçage est plus dense.

II - 2,5. CONCLUSION

Il semble que les tubes participent intégralement à rigidifier les plaques percées, lorsque la pression entre plaque et tube est suffisante, c'est-à-dire le cas du dudgeonnage réel.

II - 3. INFLUENCE DES CONTRAINTES INDUITES -

II - 3,1. DISTRIBUTION DE CONTRAINTE DANS LE CAS D'UN SEUL TUBE DUDGEONNÉ DANS UNE PLAQUE INFINIE LORSQUE CELLE-CI EST SOUMISE A LA TRACTION SIMPLE.

KIRSCH (1898, Allemagne) a donné une solution analytique de la distribution de contrainte dans une plaque infinie ayant un trou et soumise à la traction simple. Le long de l'axe de symétrie, on a les contraintes principales p et q données par les expressions suivantes : ([33] p. 3-3-13).

$$p = \frac{3}{2} \sigma_{nom} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4} \right)$$

$$q = \frac{\sigma_{nom}}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right)$$

où

σ_{nom} : contrainte nominale,

a : rayon du trou,

r : distance du centre au point considéré.

Les courbes de p et q sont tracées à la Fig. II-3,1-1.

Le dudgeonnage produit un système de contraintes résiduelles étudiées au § II-1,4.

Dans l'hypothèse des petites déformations, on peut superposer les contraintes principales p et q dues à la traction et les contraintes résiduelles p_{res} et q_{res} dues au dudgeonnage.

Les contraintes résultantes P parallèles à la section AB et Q perpendiculaires à AB, obtenues par addition algébrique des ordonnées sont représentées respectivement sur les Fig. II-3,1-2 et 3.

On voit que les contraintes P restent de traction, mais leur amplitude diminue.

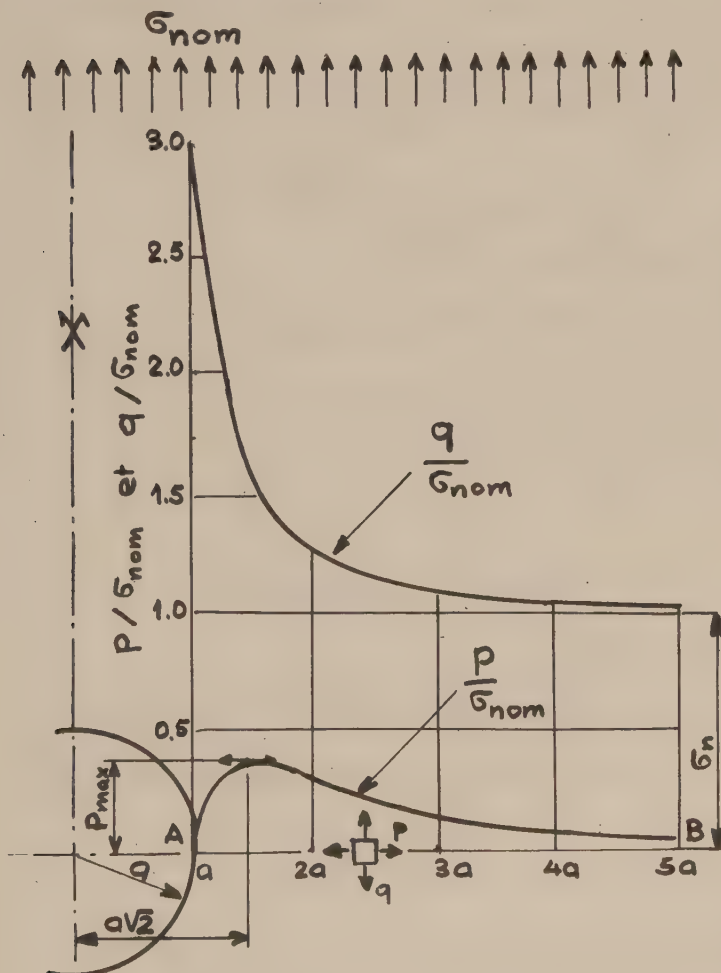


Fig. II - 3,1-1

Distribution de contrainte le long de l'axe principal AB.

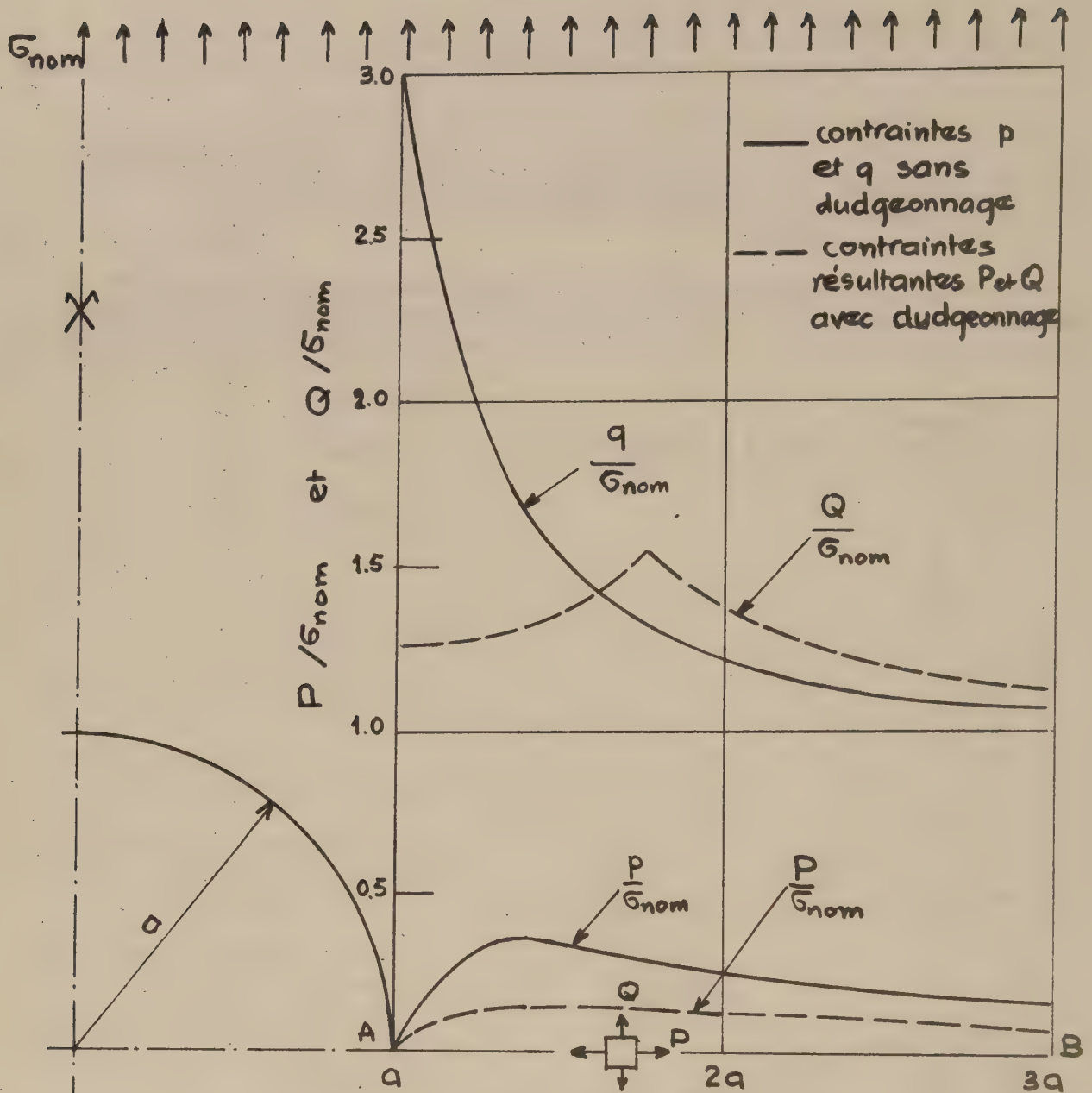


Fig. II-3,1-2. Distribution de contrainte le long de la section AB, montrant l'influence des contraintes induites (courbe tracée pour la contrainte nominale de traction σ_{nom} égale à la limite élastique σ_e).

II -3,2. INFLUENCE DES CONTRAINTES INDUITES -

Dans le cas d'une plaque infinie en traction et ayant un trou avec tubes dudgeonnés, les contraintes induites tendent à réduire la valeur de la contrainte maximale au bord du trou et l'amplitude des contraintes P . (Fig. II-3,1-2).

II - 4. VERIFICATIONS EXPERIMENTALES.

II - 4,1. PRINCIPE -

Nous allons mesurer les flèches et les contraintes sur 2 plaques similaires en acier, l'une comportant des tubes dudgeonnés, l'autre percée au diamètre intérieur des tubes (Fig. II-4,1-1).

Ces plaques sont appuyées à la périphérie et chargées au centre par une force concentrée.

Ces flèches sont mesurées par des comparateurs et les contraintes sont calculées à partir des déformations relevées par "Straingages" collés sur la face inférieure de la plaque.

La comparaison des flèches et des contraintes théoriques, lorsque les tubes sont inclus et exclus, avec les flèches et contraintes mesurées, nous permettra de conclure.

II - 4,2. MATERIEL EXPERIMENTAL -

- le dispositif expérimental est décrit dans le § 1 - 4,12.
- les diverses dimensions de la plaque avec tubes dudgeonnés sont :

diamètre extérieur de la plaque $2a = 502 \text{ mm}$,
pas triangulaire $2R = 20 \text{ mm}$,
diamètre des trous percés dans la plaque $2r = 14,2 \text{ mm}$,
tube en cupro-nickel, diamètre extérieur 14 mm ,
diamètre intérieur 11 mm ,
épaisseur $t = 1,5 \text{ mm}$,
 $h/R = 0,29$ (tubes exclus)
 $h/R = 0,45$ (tubes inclus)

La plaque percée a les mêmes dimensions par ailleurs, mais les trous sont percés au diamètre intérieur des tubes, c'est à dire à 11 mm .

II - 4,3. CALCULS THEORIQUES -

a) Flèches

$$\text{Tubes exclus } h/R = 0,29 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \frac{E^*}{E} = 0,25 \\ \nu^* = 0,37 \\ D^* = 1,07 \cdot 10^5 \text{ Nm} \end{cases}$$

$$\text{Tubes inclus } h/R = 0,45 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \frac{E^*}{E} = 0,443 \\ \nu^* = 0,31 \\ D^* = 2,30 \cdot 10^5 \text{ Nm} \end{cases}$$

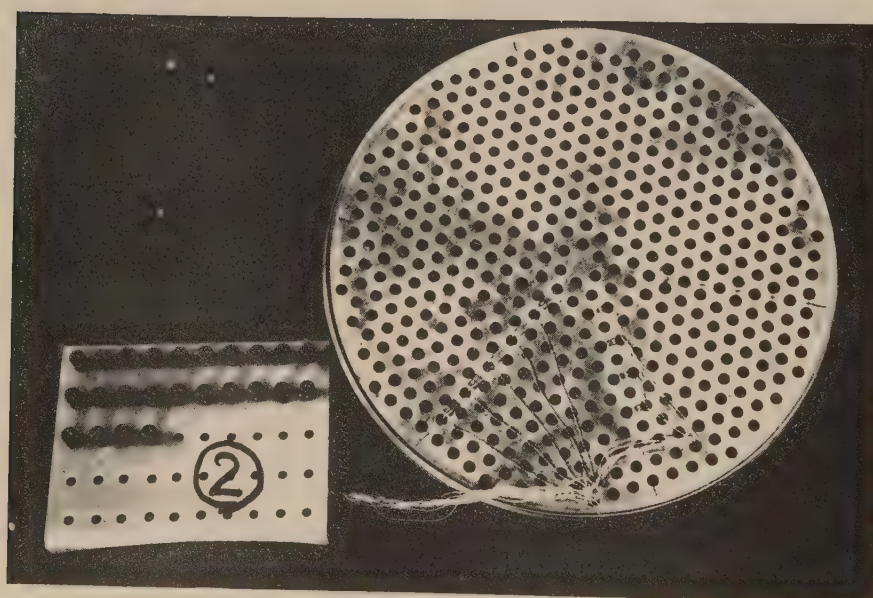
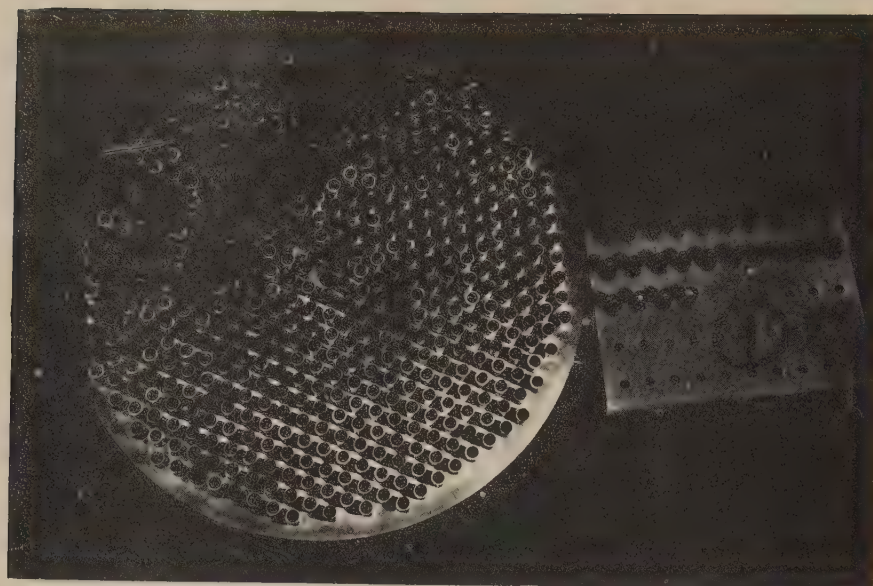


Fig. II - 4,1-1. Etude comparée des 2 plaques.

(1)- Plaque $H = 30,2$ avec tubes dudgeonnés.

(2)- Plaque identique percée au diamètre intérieur des trous.

La flèche d'une plaque complètement percée, appuyée à la périphérie et chargée au centre par une force concentrée P , est donnée par :

$$w = \frac{P}{16\pi D^*} \frac{2+\nu^*}{1+\nu^*} (a^2 - r^2) + 2 r^2 \log \frac{r}{a}$$

Pour $P = 2,94 \cdot 10^4$ N, $a = 251$ mm ; $H = 30,2$ mm, les flèches calculées pour diverses distances au centre sont :

Tableau II - 4,3-1.
Flèches théoriques

$$P = 2,94 \cdot 10^4 \text{ N} \quad H = 30,2 \text{ mm}$$

Distance au centre r (mm)	0	30	70	110	150	190	230
w tubes inclus (mm)	0,402	0,388	0,341	0,275	0,200	0,122	0,041
w tubes exclus (mm)	0,60	0,64	0,56	0,452	0,328	0,198	0,066

(voir Fig. II-4,5-1)

b) Contraintes.

La méthode de calcul des contraintes a été exposée au § I-4,112.

- Lorsque les tubes sont inclus, les jauges ne couvrent pas toute la largeur de ligament, on a $k_1 = 0,82$ (§ I-4,112) et $\frac{R}{h} = \frac{20}{9}$.
- Lorsque les tubes sont exclus, les jauges couvrent toute la largeur de ligament, on a $k_1 = 1$ et $\frac{R}{h} = \frac{20}{5,8}$.

Les contraintes calculées pour diverses distances au centre sont :

Tableau II - 4,3-2
Contraintes calculées

$$P = 2,94 \cdot 10^4 \text{ N} \quad H = 30,2 \text{ mm}$$

Distance au centre r (mm)	50	85	120	155	190
$[k \frac{R}{h} \sigma_r]$ tubes inclus (hectobars)	5,94	3,94	2,72	1,75	1,02
$[k \frac{R}{h} \sigma_r]$ tubes exclus (hectobars)	11,70	7,88	5,57	3,51	2,01

(voir Fig. II-4,5-2)

II - 4,4. RESULTATS EXPERIMENTAUX.

Les flèches et les contraintes mesurées sur les 2 plaques, l'une avec tubes dudgeonnés, l'autre percée au diamètre intérieur des tubes, sont :

a) Flèches :

Tableau II - 4,4-1. Flèches mesurées.

$$P = 2,94 \cdot 10^4 \text{ N} \quad H = 30,2 \text{ mm}$$

Distance au centre des comparateurs (mm)	1	2	3	4	5	6
w (plaques avec tubes) (mm)	0,421	0,377	0,336	0,272	0,200	0,124
w (plaque percée au diam. intérieur des tubes) (mm)	0,392	0,355	0,304	0,248	0,189	0,107

b) Contraintes :

(voir Fig. II-4,5-1)

Les contraintes radiales mesurées sont obtenues à partir des mesures des déformations par la relation :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_t)$$

Pour différentes positions des jauges, on a :

Tableau II - 4,4-2.

$$P = 2,94 \cdot 10^4 \text{ N} \quad H = 30,2 \text{ mm}$$

Position des jauges (distance au centre en mm)	51,9	86,6	121,2	155,9	190,5
Contrainte radiale mesurée dans plaque avec tubes (hectobars)	7,96	5,22	3,36	1,91	0,54
Contrainte radiale mesurée dans plaque percée au diam. intérieur des tubes (hectobars)	5,20	4,12	2,16	1,25	0,70

(voir Fig. II-4,5-2)

II - 4,5. COMPARAISON DES RESULTATS .

Les diverses flèches calculées et mesurées sont portées sur la Fig. II - 4,5-1.

Les diverses contraintes calculées et mesurées sont représentées sur la Fig. II - 4,5-2.

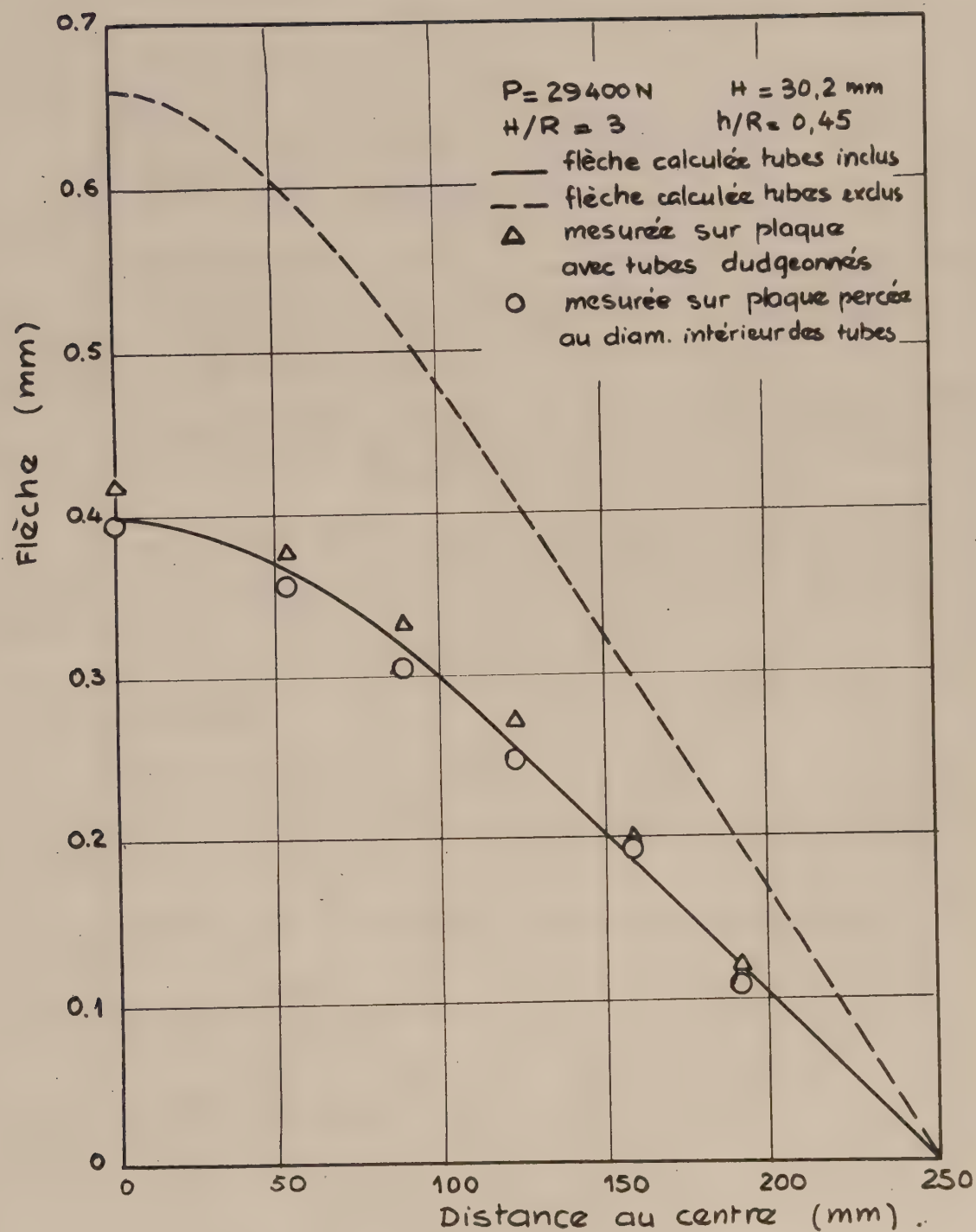


Fig. II - 4,5-1. Comparaison de diverses flèches mesurées et calculées.

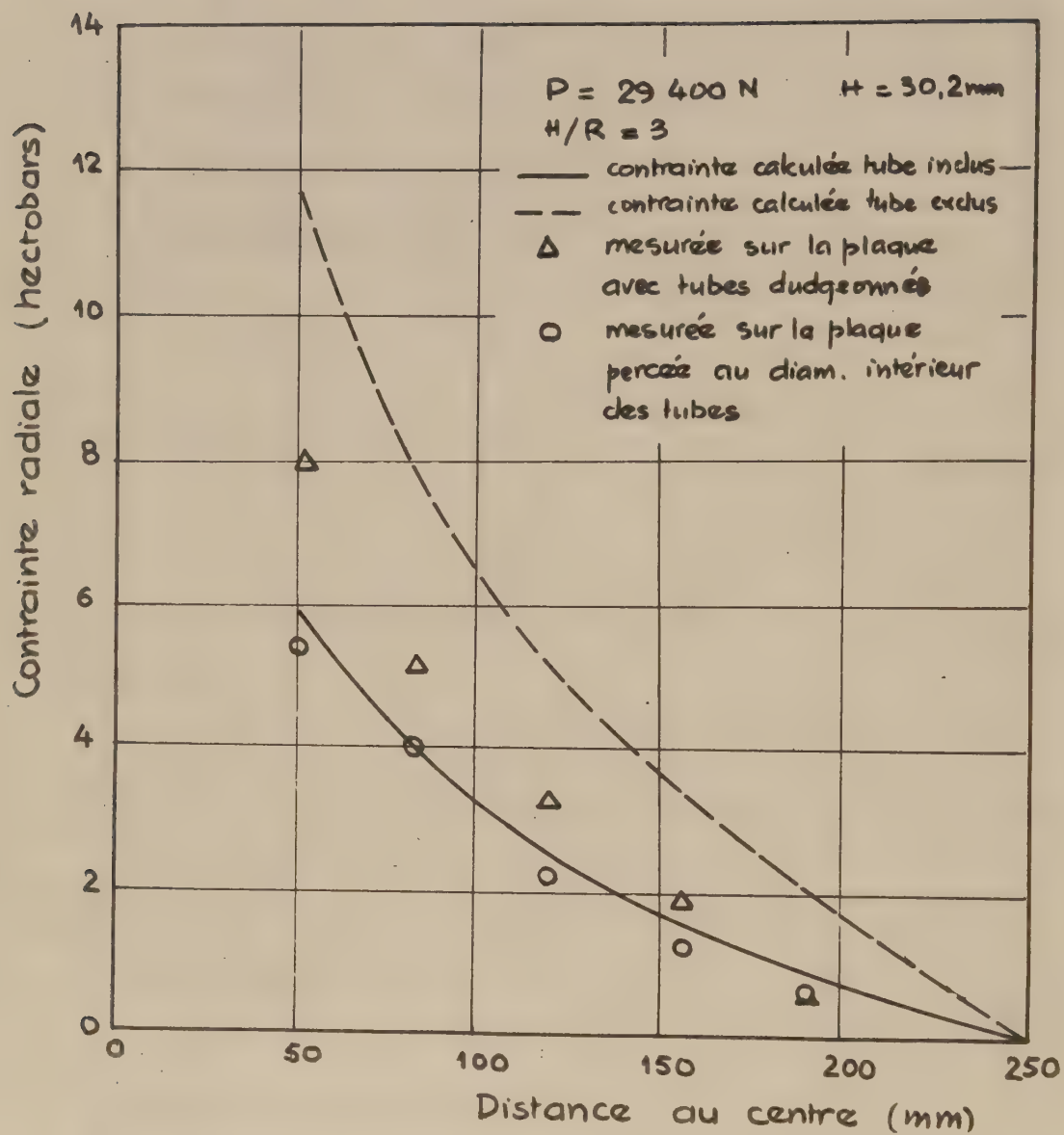


Fig. II - 4,5-2. Comparaison de diverses contraintes calculées et mesurées.

II - 5. INTERPRETATION DES RESULTATS ET CONCLUSION.

II - 5,1. FLECHES.

En examinant la Fig. II-4,5-1, nous constatons que :

- la flèche de la plaque percée au diamètre 11 mm coïncide avec la flèche calculée.
- la flèche de la plaque avec tubes dudgeonnés est plus grande que la flèche calculée avec le diamètre intérieur des tubes de 7 μ . Ceci peut être expliqué par le matériau différent qui constitue les tubes (tubes plus mous) et par l'augmentation du diamètre intérieur des tubes.
- la flèche calculée avec tubes exclus est plus grande que celle obtenue expérimentalement pour la plaque avec tubes dudgeonnés. La différence est de 66 % par excès.

On conclut donc que pour calculer la flèche des plaques avec tubes dudgeonnés, on peut la considérer comme une plaque percée au diamètre intérieur des tubes. L'erreur est inférieure à 7 %. Ces résultats confirment notre expérience personnelle de l'influence des tubes sur la rigidité.

II - 5,2. CONTRAINTES.

En examinant la Fig. II-4,5-2, nous constatons que :

- aux erreurs d'expérience près, la contrainte calculée et la contrainte expérimentale de la plaque percée au diamètre intérieur des tubes ($2r = 11\text{mm}$) coïncident,
- la contrainte expérimentale de la plaque avec tubes dudgeonnés est plus grande de 20 %,
- lorsqu'on néglige les tubes (contrainte calculée avec tubes exclus), le résultat est de 50 % supérieur.

On conclut donc que, au point de vue de la contrainte, la plaque avec tubes dudgeonnés ne se comporte pas de la même façon que la plaque percée au diamètre intérieur. Ceci peut être expliqué par l'influence des contraintes induites.

3ème PARTIE

APPLICATION DES METHODES DE CALCUL
PRECITEES A UN CAS PARTICULIER :
ECHANGEUR DE CHALEUR .
COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE .

Notre expérience a porté sur la boîte à eau d'un échangeur déjà en service à l'issue d'une campagne d'essais thermodynamiques effectués à l'E.C.A.N. d'Indret. Pour éliminer l'action des tubes agissant comme fondation élastique sur la plaque, nous avons coupé les tubes et nous les avons pincés de manière à les rendre étanches.

Ici, la plaque percée fait partie d'une structure. Nous allons voir comment la rigidité de la plaque équivalente va affecter les contraintes calculées dans le reste de la structure comme dans la plaque elle-même.

Nous allons appliquer les différentes théories à ce cas particulier et confronter les résultats théoriques et expérimentaux.

III - 1. CALCULS THEORIQUES.

III - 1,1. METHODE D'ANALYSE DES CONTRAINTES ET DES DEFORMATIONS DE L'ECHANGEUR.

III - 1,11 - Principe.

La boîte à eau de l'échangeur de chaleur est représentée avec sa cotation détaillée à la Fig. III-1,1-1.

Pour calculer cette capacité sous pression, on peut la décomposer en éléments simples, pour lesquels on sait calculer les contraintes et les déformations sous les chargements donnés.

Ces éléments séparés à leur jonction se déforment sous la pression, mais pas de la même façon. Pour maintenir la continuité, on introduit des moments et des forces de discontinuité inconnus aux jonctions. En écrivant la continuité de la déflexion et de la rotation sous l'effet des chargements propres et des forces de discontinuité, on obtient un système d'équations dont la résolution permet de déterminer ces inconnues.

Connaissant ces moments et ces forces aux jonctions, les différents éléments sont traités séparément. Les contraintes et les déformations ainsi trouvées sont celles de la structure dans son ensemble.

III - 1,12 - Décomposition schématique de la boîte à eau de l'échangeur.

La boîte à eau (Fig. III-1,1-1) est décomposée en 3 éléments :

- la plaque tubulaire,
- la bride,
- et le fond hémisphérique. (Fig. III-1,1-2)

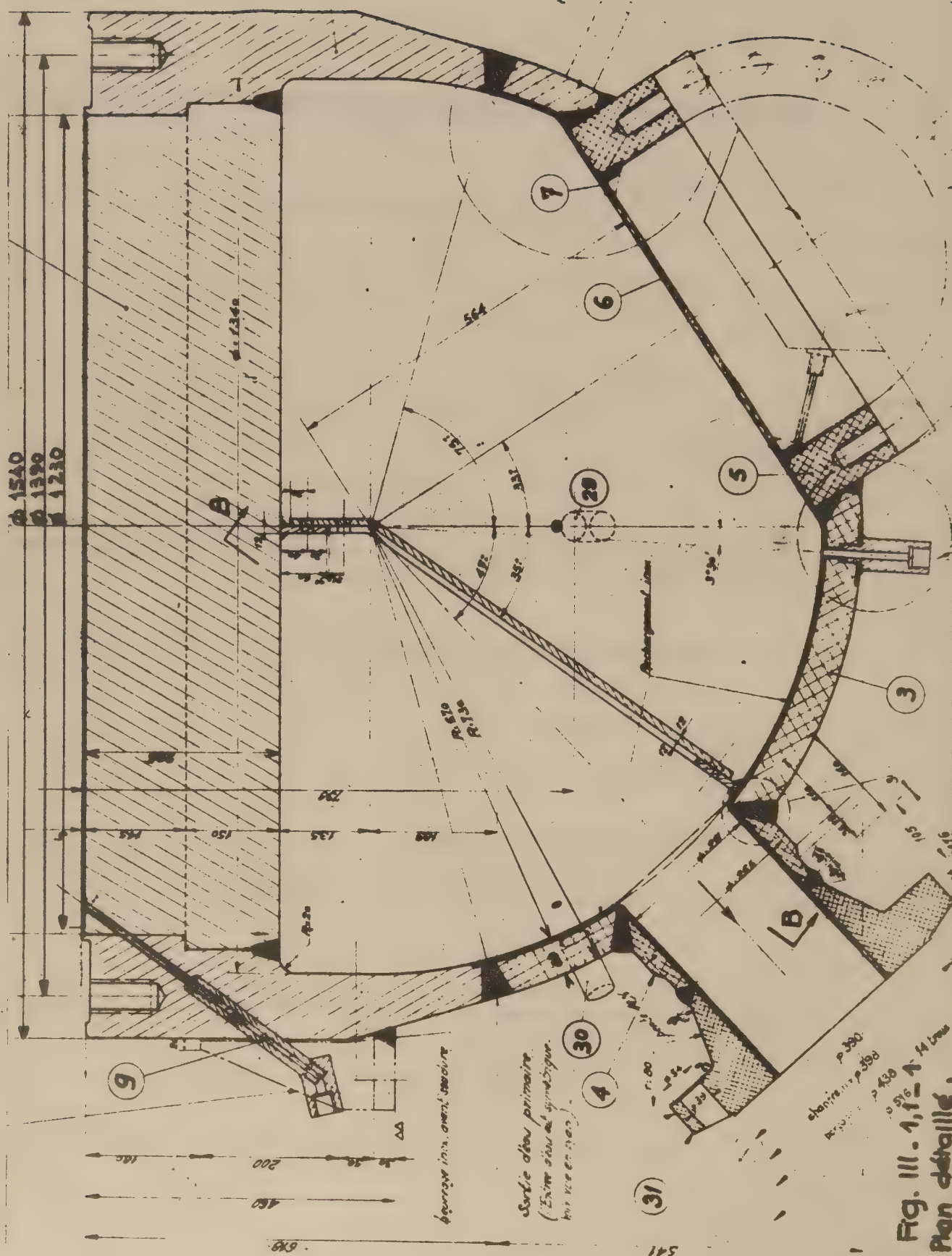
III - 1,121 - Plaque tubulaire.

La plaque est traitée comme une plaque percée renforcée par des raidisseurs constitués par 2 bandes non percées.

Les diverses dimensions sont :

épaisseur de la plaque, $H = 300$ mm
 diamètre des trous percés dans la plaque, $2r = 12,3$ mm
 pas triangulaire, $2R = 18$ mm
 épaisseur des tubes, $t = 1,3$ mm
 largeur moyenne des bandes non percées, $l = 45,9$ mm
 nombre de bandes non percées, $n = 2$

Cette plaque contient 1 122 tubes et est en acier inox 18-8 (Fig. III-1,1-2 et 3).



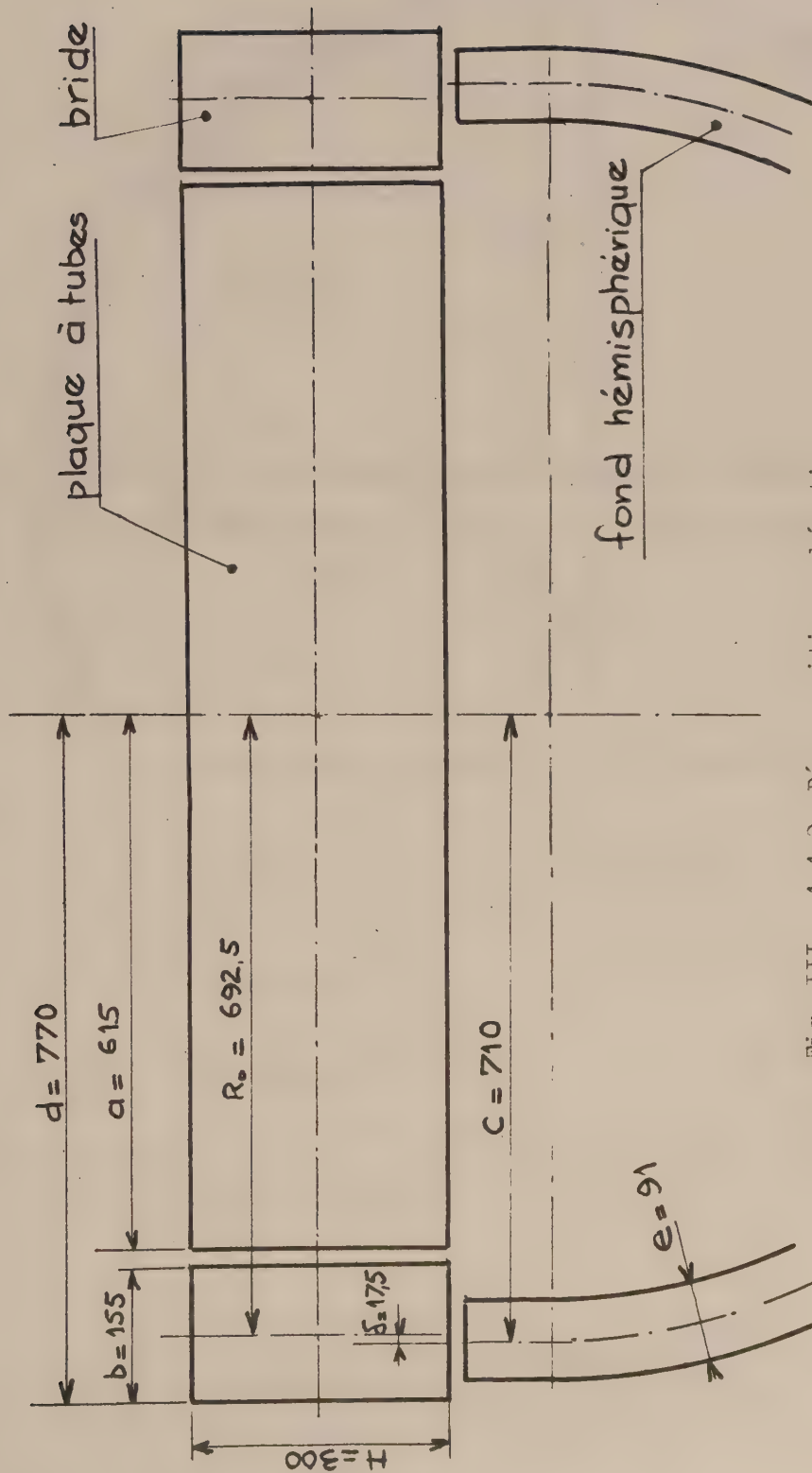


Fig. III - 1,1-2. Décomposition schématique de la tête à eau de l'échangeur en éléments simples.

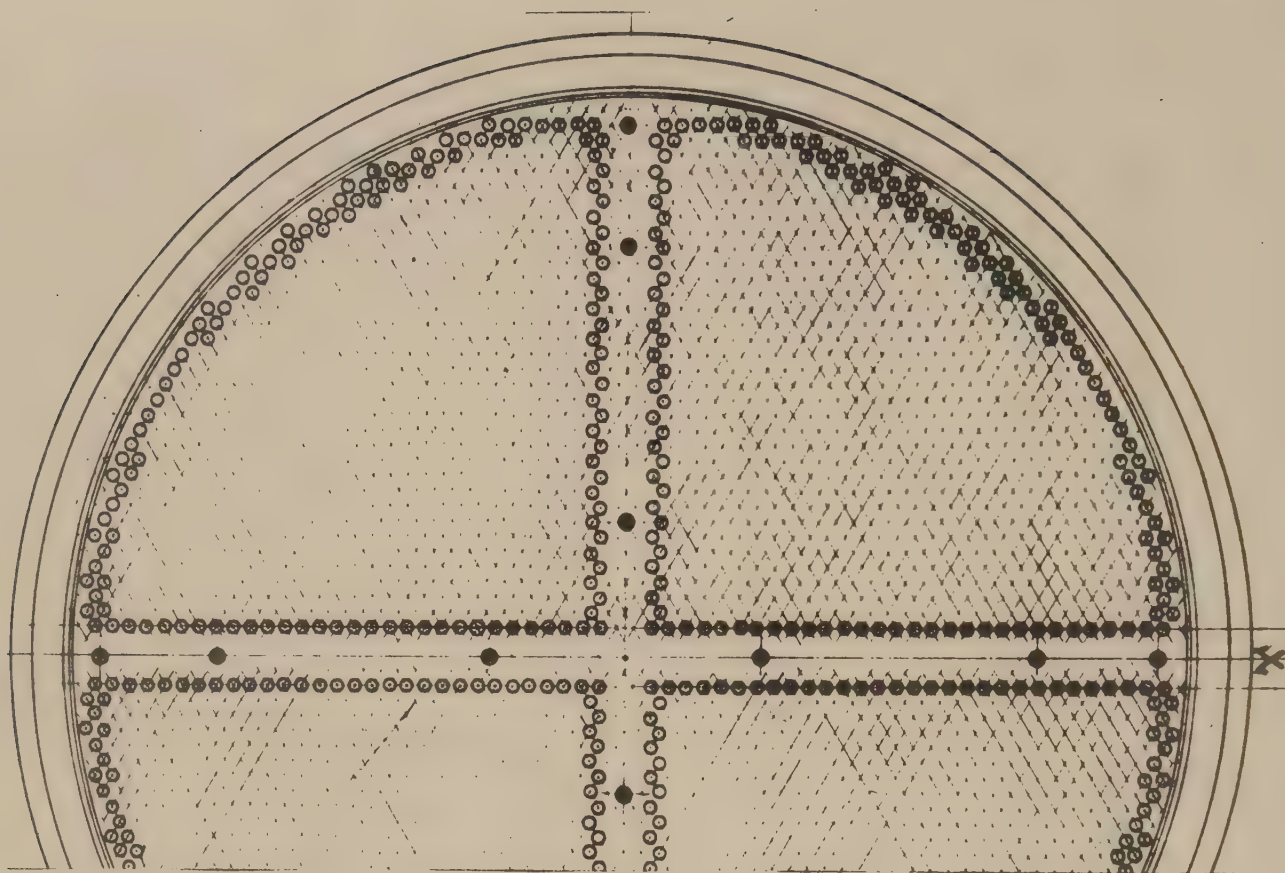


Fig. III - 1,1-3. Plaque à tubes de l'échangeur.

III - 1,122 - Bride (Fig. III-1,1-2) .

Les diverses dimensions sont :

rayon extérieur :	$d = 770 \text{ mm}$
largeur :	$b = d - a = 155 \text{ mm}$
hauteur :	$H = 300 \text{ mm}$
rayon moyen :	$R_0 = \frac{a + d}{2} = 692,5 \text{ mm}$

III - 1,123 - Fond hémisphérique .

Le fond hémisphérique peut être considéré comme ayant une épaisseur constante e , tel que :

$$e = \frac{e_1 + e_0}{2}$$

où e_1 = épaisseur de la partie cylindrique, $e_1 = 100 \text{ mm}$
(Fig. III-1,1-3bis).

e_0 = épaisseur équivalente de partie sphérique. Cette partie comporte une épaisseur variable. Cette épaisseur e_0 peut être calculée par la référence [38].

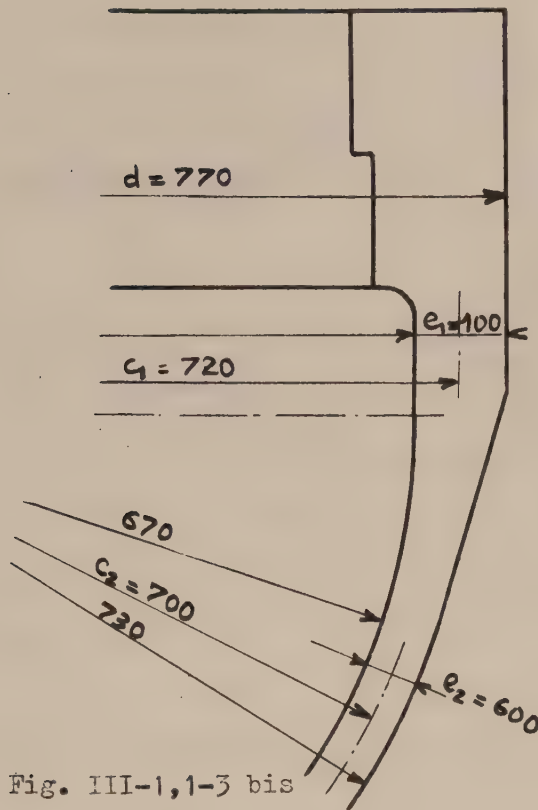


Fig. III-1,1-3 bis

Ce qui donne : $e_0 = 82$ mm .

L'épaisseur est donc égale à : $e = \frac{100 + 82}{2} = 91$ mm .

Le rayon moyen c peut être pris égal à : [31]

$$c = \frac{c_1 + c_2}{2} \quad \text{où } c_1 : \text{rayon de la partie cylindrique, } c_1 = 720 \text{ mm.}$$

$$c_2 : \text{rayon de la partie sphérique, } c_2 = 700 \text{ mm.}$$

d'où $c = 710$ mm .

Soit e_2 , l'épaisseur avant l'épaississement, $e_2 = 50$ mm .

L , la longueur d'épaississement, $L = 200$ mm .

V , coefficient utilisé en calcul de bride,

l'épaisseur équivalente est égale à :

$$e_0 = e_2 \left(\frac{0,551}{V} \right)^{0,4}$$

où V est le coefficient défini par l'abaque C 620 T 2,2 du CORMAT en fonction des rapports e_1/e_2 et $L/\sqrt{2 f e_2}$.

f : rayon intérieur de l'hémisphère.

on a : $e_1/e_2 = 1,67$

$$L/\sqrt{2 f e_2} = 0,7$$

d'où $V = 0,253$.

III - 1,13 - Analyse des forces .

Les forces inconnues introduites aux différentes jonctions sont indiquées à la Fig. III-1,1-4.

La pression intérieure est p .

A la jonction (1), on a :

M_1 : moment de flexion par unité de longueur,

N_1 : effort normal ou force de membrane par unité de longueur,

T_1 : effort tranchant par unité de longueur.

A la jonction (2), ces différentes forces inconnues prennent l'indice 2, c'est-à-dire : M_2 , N_2 et T_2 .

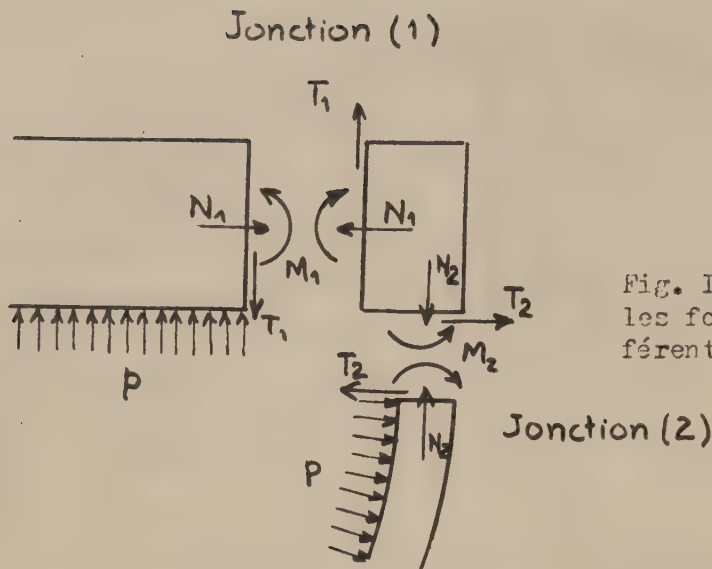


Fig. III-1,1-4. Schéma montrant les forces agissant sur les différents éléments.

III - 1,14 - Calcul des déflexions et des rotations des différents éléments.

III - 1,141 - Plaque à tubes -

Elle est traitée suivant la théorie des plaques équivalentes. Le module d'YOUNG équivalent, lorsqu'on tient compte du renforcement est [37].

$$E^* = E_1^* \left[1 + \frac{E - E_1^*}{E_1^*} \cdot \frac{nl}{2a} \right] \quad \dots(\text{III-1,1-1})$$

où

E : module d'YOUNG du matériau de la plaque,
 E_1^* : module d'YOUNG de la plaque percée,
 n : nombre de bandes non percées,
 l : largeur des bandes non percées.

Et la rigidité correspondante est :

$$D^* = \frac{E_1^* H^3}{12(1-\nu^{*2})} \cdot \left[1 + \frac{E - E_1^*}{E_1^*} \cdot \frac{nl}{2a} \right] \quad \dots(\text{III-1,1-2})$$

La plaque est soumise à :

- la pression uniforme p ,
- un moment de flexion M_1 ,
- un effort tranchant T_1 ,
- un effort normal et situé dans le plan moyen N_1 (Fig. III-1,1-5 a) .

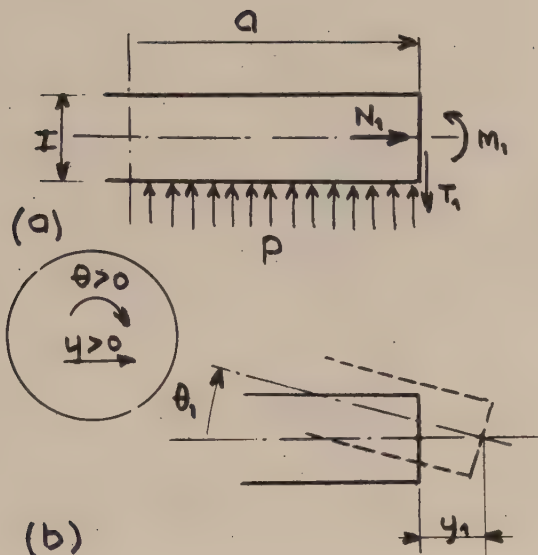


Fig. III - 1,1-5

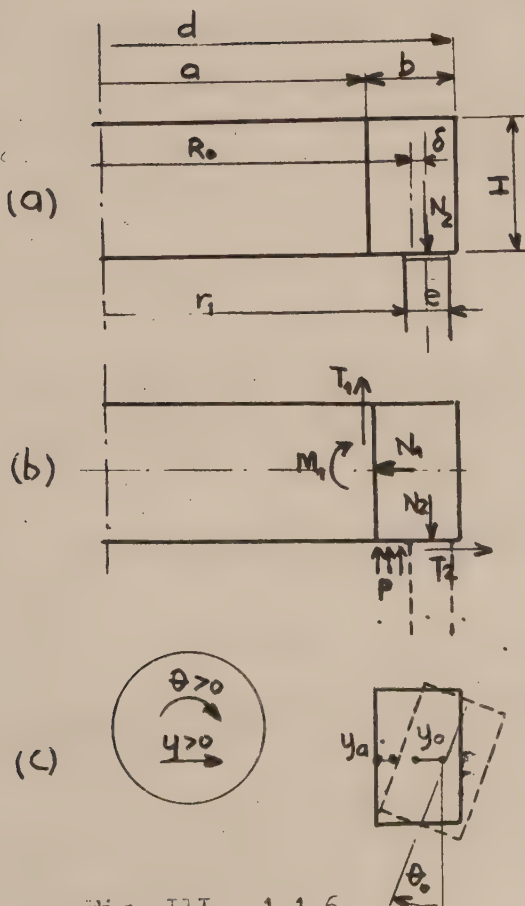
III - 1,142 - Bride.

Fig. III - 1,1-6

Sous l'effet de ces forces, le bord extérieur tourne d'un angle θ_1 et se déplace radialement d'une quantité y_1 (Fig. III-1,1-5 b).

Rotation : Pour une plaque circulaire appuyée à la périphérie, sous l'effet de la pression p et du moment périphérique M_1 , la rotation au bord est : ([32] p. 87 et p. 131)

$$\theta_1 = \frac{p a^3}{8 D^* (1 + \nu^*)} - \frac{a M_1}{D^* (1 + \nu^*)} \quad \dots (III-1,1-3)$$

Dilatation : Le déplacement radial sous l'effet de la force normale par unité de longueur est ([32] p. 52) :

$$y_1 = \frac{N_1 a H^2}{12 D^* (1 + \nu^*)} \quad \dots (III-1,1-4)$$

La bride est soumise à :

- la pression p ,
- des moments de flexion M_1 et M_2 ,
- des efforts normaux N_1 et N_2 ,
- et des efforts tranchants T_1 et T_2 .

(Fig. III-1,1-6 b)

Sous l'action de ces forces, la section de la bride tourne d'un angle de θ_0 , son centre de gravité se déplace de y_0 et le bord intérieur de y_a .

(Fig. III-1,1-6 c)

Rotation : La rotation d'une bride sous le moment M_t par unité de longueur est : ([32] p. 143).

$$\theta_0 = \frac{12 R_0}{E H^3 \log d/a} M_t$$

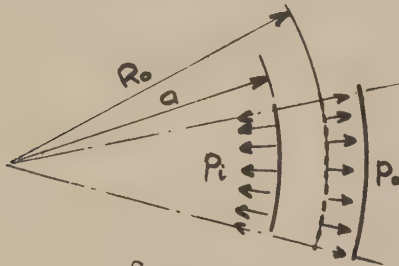
Le moment M_t est égal à : (Fig. III-1,1-6b).

$$M_t = M_1 - M_2 + T_1 \frac{b}{2} - T_2 \frac{H}{2} + N_2 \delta + \frac{p}{R_0} \int_a^{r_1} (R_0 - r) r dr \quad \dots (III-1,1-5)$$

D'où finalement :

$$\theta_0 = \frac{12 R_0}{E H^3 \log \frac{R_0}{a}} \left[M_1 - M_2 + T_1 \frac{b}{2} - T_2 \frac{H}{2} + N_2 \delta + \int_a^{R_0} \frac{p}{R_0} (R_0 - r) r dr \right] \quad \dots(\text{III-1,1-6})$$

Déplacements : Pour calculer les déplacements, on peut considérer que l'anneau est soumis à la pression p_i à la surface intérieure et à la pression p_o à la surface moyenne au niveau du rayon R_0 où, d'après la référence [31],



$$p_i = \frac{N_1}{H}$$

$$\text{et } p_o = \frac{T_2 \times 2\pi R_0}{2\pi R_0 H} = \frac{T_2}{H}$$

le déplacement radial d'un point situé au rayon r est ([32] p. 52) :

$$y_r = \frac{1-\nu}{E} \frac{R_0^2 p_o - a^2 p_i}{R_0^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 R_0^2 (p_o - p_i)}{(R_0^2 - a^2) r}$$

En remplaçant p_i et p_o par leur valeur et pour $r = a$, le déplacement du bord intérieur est :

$$y_a = \frac{1-\nu}{H E} \frac{R_0^2 T_2 - a^2 N_1}{R_0^2 - a^2} a + \frac{1+\nu}{H E} \frac{a^2 R_0^2 (T_2 - N_1)}{(R_0^2 - a^2) a} \quad \dots(\text{III-1,1-7})$$

Et le déplacement du centre du gravité de la section est :

$$y = \frac{1-\nu}{H E} \frac{R_0^2 T_2 - a^2 N_1}{R_0^2 - a^2} R_0 + \frac{1+\nu}{H E} \frac{a^2 R_0^2 (T_2 - N_1)}{(R_0^2 - a^2) R_0} \quad \dots(\text{III-1,1-8})$$

III - 1,143 - Fond hémisphérique.

On a montré que l'effet de discontinuité dans un cylindre est rapidement amorti à partir de la discontinuité. Ceci est également vrai pour le fond hémisphérique. Pour cette raison, l'hémisphère a des propriétés élastiques au bord qui ne diffèrent que de très peu de celles d'un cylindre tangent de même épaisseur et de même rayon [34].

Le fond est soumis à la pression p , au moment M_2 et aux efforts N_2 et T_2 (Fig. III-1,1-7 a).

Sous l'effet de ces forces, le bord tourne d'un angle θ_2 et se déplace radialement de y_2 . (Fig. III-1,1-7 b)

N_2 équilibre la composante axiale des forces de pression.

Le fond hémisphérique peut être traité comme une poutre semi-infinie sur fondation élastique de "module de fondation" k .

$$k = \frac{E e}{c^2}$$

$$\dots(\text{III-1,1-9})$$

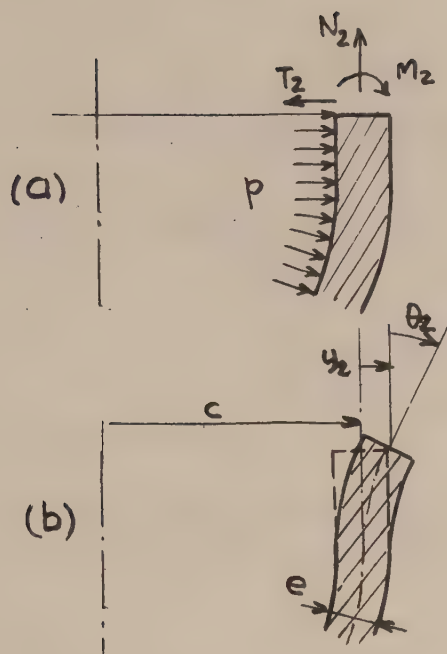


Fig. III - 1,1-7

(E : module d'YOUNG)
et de "constante de coque" λ .

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{c^2 e^2}} \quad \dots(\text{III-1,1-10})$$

Rotation : La rotation due à T_2 et M_2 est [32] :

$$\theta_2 = -\frac{2\lambda^2}{k} T_2 + \frac{4\lambda^3}{k} M_2 \quad \dots(\text{III-1,1-11})$$

Déplacement : Sous l'effet de la pression p et des forces T_2 et des moments M_2 , le déplacement radial y_2 est :

$$y_2 = \frac{p c^2}{2e E} (1-\nu) - \frac{2\lambda}{k} T_2 + \frac{2\lambda^2}{k} M_2 \quad \dots(\text{III-1,1-12})$$

III - 1,15 - Mise en équations.

En écrivant la continuité aux jonctions (1) et (2), on a le système d'équations :

Jonction (1)

- la rotation de la plaque est égale à celle de la bride :

$$\theta_1 = \theta_0 \quad (\text{I})$$

- la dilatation radiale de la plaque est égale à celle de la bride au rayon a :

$$y_1 = y_a \quad (\text{II})$$

Jonction (2)

- la rotation du bord du fond hémisphérique est égal à celle de la bride :

$$\theta_2 = \theta_0 \quad (\text{III})$$

- le déplacement du bord est égal à la somme du déplacement du centre de gravité de la bride et du déplacement du bord dû à la rotation.

$$y_2 = y_0 - \frac{h}{2} \theta_0 \quad (\text{IV})$$

On a ainsi 4 équations à 4 inconnues dont la résolution permet de déterminer M_1 , N_1 , M_2 et T_2 .

III - 1,16 - Contraintes et déformations de la plaque tubulaire.

La plaque tubulaire est traitée suivant la théorie des

plaques équivalentes.

La flèche w d'une plaque circulaire est obtenue à partir de l'équation différentielle : [34]

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{Q}{D^*} \quad \dots(\text{III-1,1-13})$$

où Q : effort tranchant au rayon r ,

D^* : rigidité de la plaque percée,

La solution générale est :

$$w = \frac{Pr}{64 D^*} + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \log \frac{r}{a} + C_3 \quad \dots(\text{III-1,1-14})$$

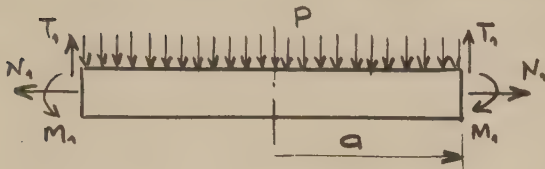
Pour avoir la flèche finie au centre, le terme logarithmique doit être éliminé. Par suite, C_2 doit être nul. Les constantes C_1 et C_3 sont déterminées par les conditions aux limites.

La rotation est donnée par l'équation :

$$\theta = \frac{dw}{dr} \quad \dots(\text{III-1,1-15})$$

Les moments par unité de longueur en un point sont données par les relations :

$$\begin{cases} M_r = D^* \left(\frac{d\theta}{dr} + \frac{\nu}{r} \theta \right) \\ M_t = D^* \left(\frac{\theta}{r} + \nu \frac{d\theta}{dr} \right) \end{cases} \quad \dots(\text{III-1,1-16})$$



La plaque isolée de sa structure a des forces extérieures indiquées à la figure ci-contre.

III - 1,161 - Flèches .

La flèche due à la force de membrane N_1 est négligeable [34]. Calculons les flèches dues à la pression répartie, au moment périphérique M_1 et à l'effort tranchant T_1 . On peut appliquer la méthode de superposition.

- flèche due à p : la flèche d'une plaque circulaire simplement appuyée à la périphérie est trouvée par intégration de l'équation (III-1,1-13) avec ses conditions aux limites. Elle est égale à :

$$w(p) = \frac{p a^4}{64 D^*} \frac{5 + \nu^*}{1 + \nu^*} - k^2 (1 - k^2) \quad (\text{en posant } k = \frac{r}{a})$$

- flèche due à M_1 :

$$w(M_1) = \frac{M_1 a^2}{2 D^* (1 + \nu^*)} (1 - k^2)$$

La plaque étant épaisse, nous tenons compte de la flèche due à l'effort tranchant donnée par l'équation suivante : ([34] p. 73) .

$$w(T) = \frac{p a^2 H^2}{16 D^*(1-\nu^*)} (1-k^2)$$

La flèche totale est obtenue par superposition :

$$w = w(p) - w(M) + w(\pi)$$

$$w = \frac{p a^4}{64 D^*} \left[\frac{5+\nu^*}{1+\nu^*} - k^2 \right] (1-k) + \left(\frac{p a^2 H^2}{16 D^*(1-\nu^*)} - \frac{M_1 a^2}{2 D^*(1+\nu^*)} \right) (1-k^2) \quad \dots(III-1,1-17)$$

III - 1,162 - Contraintes .

Les moments par unité de longueur exercés sur les bords d'un élément de plaque autour d'un point donné sont obtenus par intégration des équations (III-1,1-16). Ici nous avons le cas d'une plaque appuyée chargée par une pression p.

A ces moments, nous superposons le moment périphérique M_1 . Nous avons les moments de flexion M_r et M_t qui agissent respectivement le long d'une section circulaire et le long d'une section diamètre.

$$M_r = \frac{p}{16} (3+\nu^*) (a^2 - r^2) - M_1 \quad \dots(III-1,1-18)$$

$$M_t = \frac{p}{16} [a^2(3+\nu^*) - r^2(1+3\nu^*)] - M_1$$

Connaissant le moment, la contrainte est donnée par :

$$\sigma = \frac{6 M}{H^2} \quad \dots(III-1,1-19)$$

En posant $k = \frac{r}{a}$, les contraintes radiales et tangentielles sont :

$$\sigma_r = \frac{6pa^2}{16 H^2} (3+\nu^*) (1-k^2) - \frac{6 M_1}{H^2}$$

$$\sigma_t = \frac{6pa^2}{16 H^2} [(3+\nu^*) - k^2(1+3\nu^*)] - \frac{6 M_1}{H^2}$$

A ces contraintes, il faut ajouter les contraintes dues à la force de membrane N_1 .

$$\sigma(N_1) = \frac{N_1}{H}$$

Au total on a :

$$\sigma_r = \frac{6pa^2}{16 H^2} (3+\nu^*) (1-k^2) - \frac{6M_1}{H^2} + \frac{N_1}{H} \quad \dots(III-1,1-20)$$

$$\sigma_t = \frac{6pa^2}{16 H^2} [(3+\nu^*) - k^2(1+3\nu^*)] - \frac{6M_1}{H^2} + \frac{N_1}{H}$$

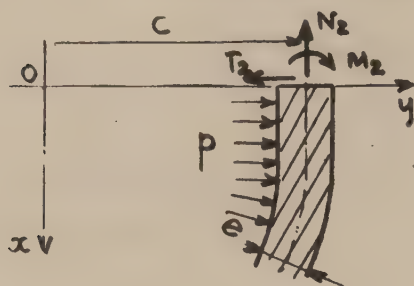
Pour avoir les contraintes réelles dans la plaque percée, on multiplie ces contraintes dans la plaque équivalente par le facteur de majoration γ .

$$\sigma_R = \sigma_r \cdot \gamma$$

$$\dots(III-1,1-21)$$

$$\sigma_T = \sigma_t \cdot \gamma$$

III - 1,17 - Contrainte dans le fond hémisphérique.



Le fond est soumis à la pression p , à la surface intérieure et à des forces de discontinuité M_2 , N_2 , T_2 au bord (Fig. III-1,1-8).

Fig. III-1,1-8.

III - 1,171 - Contrainte axiale.

La contrainte axiale à la surface extérieure est la somme de la contrainte de membrane due à la force N_2 et à la contrainte due au moment de flexion M_x .

$$\sigma_a = \frac{N_2}{e} - \frac{6 M_x}{e^2}$$

où $M_x = \frac{B_{\lambda x}}{\lambda} T_2 + A_{\lambda x} M_2$ (voir [32] p. 110)

avec $A_{\lambda x} = e^{-\lambda x} \sin \lambda x$

$$B_{\lambda x} = e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x)$$

d'où $\sigma_a = \frac{pC}{2e} + \frac{6T_2}{e^2\lambda} B_{\lambda x} - \frac{6M_2}{e^2} A_{\lambda x}$... (III-1,1-22)

III - 1,172 - Contrainte circonférentielle.

La contrainte dans la direction circonférentielle à la surface extérieure est la somme de la contrainte de membrane, de la contrainte due à la déformation radiale et de la contrainte due à l'effet de POISSON.

$$\sigma_c = \frac{pC}{2e} + \frac{E y_x}{C} - \nu \frac{6 M_x}{e^2}$$

dans laquelle M_x est le moment de flexion précédemment calculée et

$$y_x = \frac{2\lambda}{k} T_2 D_{\lambda x} - \frac{2\lambda^2}{k} M_2 C_{\lambda x}$$

avec $C_{\lambda x} = e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x)$

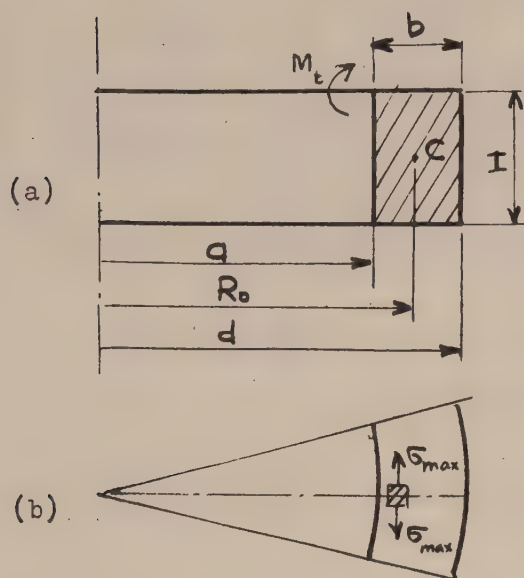
$$D_{\lambda x} = e^{-\lambda x} \cos \lambda x$$

En définitive, la contrainte circonférentielle est :

$$\sigma_c = \frac{pC}{2e} + \frac{E}{C} \frac{2\lambda}{k} T_2 D_{\lambda x} - \frac{E}{C} \frac{2\lambda^2}{k} M_2 C_{\lambda x} + \frac{6\nu T_2}{e^2\lambda} B_{\lambda x} - \frac{6\nu M_2}{e^2} A_{\lambda x}$$

... (III-1,1-23)

III - 1,18 - Contrainte dans la bride.



La bride est soumise à un moment de torsion M_t par unité de longueur donné par l'équation III-1,1-4. (Fig. III-1,1-9a).

La contrainte normale maximale se trouvant dans le coin intérieur ([32] p.142).

$$\sigma_{\max} = \frac{6 R_o M_t}{H^2 a \log \frac{d}{a}}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{6 R}{H^2 a \log \frac{d}{a}} \left[M_1 - M_2 + T_1 \frac{b}{2} - T_2 \frac{H}{2} + N_2 \delta + \frac{P}{R_o} \int_a^{R_o} (R_o - r) r dr \right] \dots (III-1,1-24)$$

Fig. III-1,1-9

III - 1,2. APPLICATIONS NUMERIQUES.

III - 1,21 - Données numériques.

La boîte à eau de l'échangeur de chaleur (Fig. III-1,1-1) est décomposée en éléments simples (Fig. III-1,1-2) dont les diverses dimensions sont précisées au § III-1,12.

La pression interne est de $p = 98$ bars.

Pour la plaque percée, nous prenons le diamètre des trous, le diamètre intérieur des tubes conformément aux conclusions précédentes.

$$\frac{2h}{2R} = \frac{8,3}{18} = 0,46$$

$$\frac{H}{R} = \frac{300}{9} = 33 \quad (\text{plaque épaisse})$$

La boîte à eau est en acier de module d'YOUNG $E = 20\,600$ hectobars et de coefficient de POISSON $\nu = 0,30$.

III - 1,22 - Plaque tubulaire.

La rigidité de la plaque équivalente D^* , le coefficient de POISSON équivalent ν^* et le facteur de majoration de contrainte Y sont déterminés par différentes théories et sont réunis dans le tableau III-1,2-1.

Tableau III - 1,2-1.

	MILLER	DUNCAN	VOLOSHIN	HORVAY	MALKIN	O'DONNELL
D^* (Nm)	$3,87.10^8$	$3,58.10^8$	$3,21.10^8$	$2,04.10^8$	$2,08.10^8$	$2,53.10^8$
ν^*	0,30	0,30	0,30	0,41	0,33	0,30
Y	1,25	1,47	1,80	$Y_{h/R} (\beta)$	$Y_{h/R} (\beta)$	$Y_{h/R} (\beta)$

III - 1,23 - Résolution des systèmes d'équations.

Les équations des déflexions et des rotations de la bride et de la coque sont inchangées pour toutes les théories. Celles de la plaque varient par contre avec les diverses théories.

Les équations (I), (II), (III), (IV) du § III-1,15 sont obtenues par diverses théories et les systèmes d'équations sont résolus sur calculateur électronique du centre de calcul IBM de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes. Les résultats sont rassemblés dans le tableau III-1,2-2.

Tableau III - 1,2-2

	M_1 (mN/m)	N_1 (N/m)	M_2 (mN/m)	T_2 (N/m)
MILLER	$1,082.10^5$	$1,300.10^7$	$1,625.10^5$	$1,345.10^7$
DUNCAN	$1,205.10^5$	$1,318.10^7$	$1,665.10^5$	$1,371.10^7$
VOLOSHIN	$1,365.10^5$	$1,338.10^7$	$1,725.10^5$	$1,410.10^7$
HORVAY	$1,910.10^5$	$1,380.10^7$	$1,925.10^5$	$1,541.10^7$
MALKIN	$1,970.10^5$	$1,390.10^7$	$1,945.10^5$	$1,552.10^7$
O'DONNELL	$1,700.10^5$	$1,365.10^7$	$1,845.10^5$	$1,492.10^7$

D'après le tableau III-1,2-2, nous remarquons que les valeurs des moments périphériques M_1 exercés par le reste de la structure sur la plaque diminuent lorsque la plaque devient rigide.

Pour un encastrement parfait, le moment est :

$$M_0 = \frac{pa^2}{8} = \frac{1 \times 615^2}{8} = 4,62.10^5 \text{ mN/m}$$

Le degré d'encastrement défini par le rapport M_1/M_0 est calculé pour diverses théories.

Tableau III - 1,2-3

	MILLER	DUNCAN	VOLOSHIN	O'DONNELL	MALKIN	HORVAY
$D^*(Nm)$	$3,87 \cdot 10^8$	$3,58 \cdot 10^8$	$3,21 \cdot 10^8$	$2,53 \cdot 10^8$	$2,08 \cdot 10^8$	$2,04 \cdot 10^8$
M_1 / M_0	24,8 %	26,1 %	29,5 %	36,7 %	41,4 %	42,6 %

III - 1,3. RESULTATS DES CALCULS THEORIQUES.III - 1,31 - Contraintes et déformations de la plaque à tubes.a) Flèche :

La flèche est calculée par l'équation III-1,1-17 pour différentes théories et pour diverses distances au centre r .

Tableau III - 1,3-1.

Flèche le long d'un rayon en mm.

$k = r/a$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
MILLER	0,264	0,252	0,214	0,156	0,078	0
DUNCAN	0,282	0,269	0,229	0,167	0,083	0
VOLOSHIN	0,308	0,294	0,250	0,182	0,090	0
HORVAY	0,459	0,437	0,371	0,269	0,133	0
MALKIN	0,476	0,453	0,385	0,281	0,140	0
O'DONNELL	0,368	0,350	0,298	0,216	0,107	0

(voir Fig. III-3,1-1)

b) Contraintes théoriques dans la plaque percée.

Les contraintes radiale et tangentielle σ_r et σ_t dans la plaque équivalente sont obtenues par les équations III-1,1-20.

Les degrés de biaxialité $\beta = \sigma_r / \sigma_t$ ou σ_t / σ_r tel que $-1 \leq \beta \leq 1$ sont calculés pour différentes théories.

Dans la méthode des coefficients de ligament et de déflexion, le facteur de majoration de contrainte Y est constant et égal à $1/\eta_6$.

Dans la méthode des constantes élastiques équivalentes, les facteurs Y dépendent de β et sont déterminés pour différentes théories.

Les contraintes maximales sont obtenues par l'équation III-1,1-21.

Les divers résultats sont rassemblés dans les tableaux suivants. Les contraintes sont exprimées en hectobars.

Tableau III - 1,3-2

MILLER

$k = r/a$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
σ_r	4,75	4,54	3,95	2,93	1,50	- 0,33
σ_t	4,75	4,63	4,27	3,70	2,88	1,82
Y	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35
$Y \sigma_r$	6,41	6,13	5,33	3,95	2,03	- 0,45
$Y \sigma_t$	6,41	6,26	5,78	5,01	3,89	2,46

Tableau III - 1,3-3

DUNCAN

$k = r/a$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
σ_r	4,72	4,52	3,91	2,90	1,47	- 0,36
σ_t	4,72	4,61	4,25	3,67	2,85	1,79
Y	1,47	1,47	1,47	1,47	1,47	1,47
$Y \sigma_r$	6,94	6,62	5,74	4,26	2,04	- 0,53
$Y \sigma_t$	6,94	6,76	6,23	5,40	4,18	2,54

Tableau III - 1,3-4

VOLOSHIN

$k = r/a$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
σ_r	4,62	4,42	3,82	2,80	1,37	- 0,46
σ_t	4,62	4,51	4,16	3,57	2,75	1,69
Y	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80
$Y \sigma_r$	8,33	7,95	6,88	5,05	2,47	- 0,83
$Y \sigma_t$	8,33	8,10	7,48	6,44	4,96	4,81

Tableau III - 1,3-5

HORVAY

$k = r/a$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
σ_r	4,46	4,24	3,55	2,56	1,09	- 0,79
σ_t	4,46	4,33	3,91	3,29	2,26	1,03
β	1	0,98	0,907	0,78	0,48	- 0,7-
γ	2,45	0,48	2,58	2,77	3,20	4,84
$\gamma \sigma_r$	10,92	10,50	9,16	7,10	3,49	- 3,82
$\gamma \sigma_t$	10,92	10,75	10,08	9,12	7,23	4,98

Tableau III-1,3-6

MALVIN

$k = r/a$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
σ_r	4,27	4,07	3,45	2,43	1,00	- 0,85
σ_t	4,27	4,15	3,79	3,24	2,32	1,22
β	1	0,98	0,91	0,75	0,43	- 0,70
γ	2,45	2,47	2,58	2,81	3,28	4,74
$\gamma \sigma_r$	10,48	10,05	8,90	6,82	3,26	- 4,03
$\gamma \sigma_t$	10,48	10,27	9,80	9,10	7,60	5,76

Tableau III - 1,3-7

O'DONNELL

$k = r/a$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
σ_r	4,41	4,20	3,61	2,58	1,16	- 0,67
σ_t	4,41	4,30	3,93	3,36	2,54	1,47
β	1	0,98	0,92	0,77	0,46	- 0,45
γ	3,10	3,17	3,36	3,53	4,03	4,03
$\gamma \sigma_r$	13,65	13,32	12,20	9,12	4,67	- 2,77
$\gamma \sigma_t$	13,65	13,60	13,22	11,85	10,02	5,95

III - 1,32 - Contraintes dans le fond hémisphérique.

Nous avons calculé les contraintes pour 2 points où nous collerons ultérieurement des jauges dans l'étude expérimentale. Ces points correspondent aux distances $x = 0$ et $x = 135$ mm par rapport au plan de discontinuité. (Fig. III-1,1-8)

a) Contraintes axiales :

Elles sont données par l'équation III-1,1-22.

Tableau III -1,3-8
Contraintes axiales théoriques.

	MILLER	DUNCAN	VOLOSHIN	HORVAY	MALKIN	O'DONNELL
$[\sigma_a]_{x=0}$	- 4,48	- 4,92	- 6,06	- 10,05	- 10,43	- 9,49
$[\sigma_a]_{x=135}$	4,06	3,80	3,22	0,98	0,78	1,88

Les contraintes sont exprimées en hectobars. (voir Fig. III-3,2-4)

b) Contraintes circonférentielles :

Elles sont données par l'équation III-1,1-23 .

Tableau III - 1,3-9
Contraintes circonférentielles théoriques.

	MILLER	DUNCAN	VOLOSHIN	HORVAY	MALKIN	O'DONNELL
$[\sigma_c]_{x=0}$	7,56	7,30	6,62	4,27	4,02	5,18
$[\sigma_c]_{x=135}$	7,81	7,77	7,65	7,25	7,19	7,40

Les contraintes sont exprimées en hectobars.

III - 1,33 - Contraintes dans la bride

Le moment de torsion par unité de longueur est donné par l'équation III-1,1-5.

La contrainte maximale se trouve dans le coin intérieur de la bride et est donnée par l'équation III-1,1-25.

Tableau III - 1,3-10

	MILLER	DUNCAN	VOLOSHIN	HORVAY	MALKIN	O'DONNELL
N (mN/m)	$6,48 \cdot 10^3$	$6,79 \cdot 10^3$	$7,21 \cdot 10^3$	$8,73 \cdot 10^3$	$8,88 \cdot 10^3$	$8,10 \cdot 10^3$
σ_{max} (hectobars)	2,17	2,27	2,41	2,92	2,97	2,71

(voir Fig. III-3,2-7)

III - 2. EXPERIENCE SUR L'ECHANGEUR.

L'expérience a pour objet de mesurer la flèche dans la plaque à tubes et les contraintes dans la plaque, la bride et le fond, lorsque la capacité est sous pression. La confrontation des résultats théoriques et expérimentaux permet de vérifier la validité des différentes théories.

III - 2,1. DESCRIPTION DE L'INSTALLATION.

L'installation générale est montrée à la Fig. III-2,1-1. Elle comprend essentiellement :

- La boîte à eau qui repose par intermédiaire de 4 assises soudées à la surface latérale, sur un bâti construit spécialement à cet effet.
- Une barre horizontale rigidement soudée sur le bâti permettant ainsi de placer des comparateurs micrométriques. Nous avons disposé 7 comparateurs suivant un diamètre ce qui permet de mesurer les flèches.
- Des jauges de déformations qui sont collées sur la plaque et sur la virole. Les mesures sont effectuées avec le pont portatif PHILIPS PR 92 05 qui a une précision de 1 % de la valeur mesurée.
- Une pompe électrique qui peut donner une pression variant de 0 à 200 bars.
- Un manomètre branché directement à la capacité donne la pression à l'intérieur de celle-ci.

Sur la photo III-2,1-1, on peut voir les tubes qui sont coupés et pincés de façon étanches.

L'emplacement des jauges est indiqué à la Fig. III-2,1-2.

La position des comparateurs est montrée à la Fig. III-2,1-3.

III - 2,2. ESSAIS EFFECTUES.

Nous avons mesuré les contraintes et les flèches, lorsque la pression est de 98 bars.

Nous avons chargé la structure d'abord à 50 bars puis redescendu à 0. Nous équilibrons alors le pont et réglons à zéro les comparateurs. Nous chargeons ensuite à 98 bars, puis nous lisons les flèches données par les comparateurs et nous mesurons les déformations données par les jauges.

Les contraintes sont calculées à partir de ces déformations par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) \\ \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) \end{array} \right. \quad \dots (III-2,2-1)$$

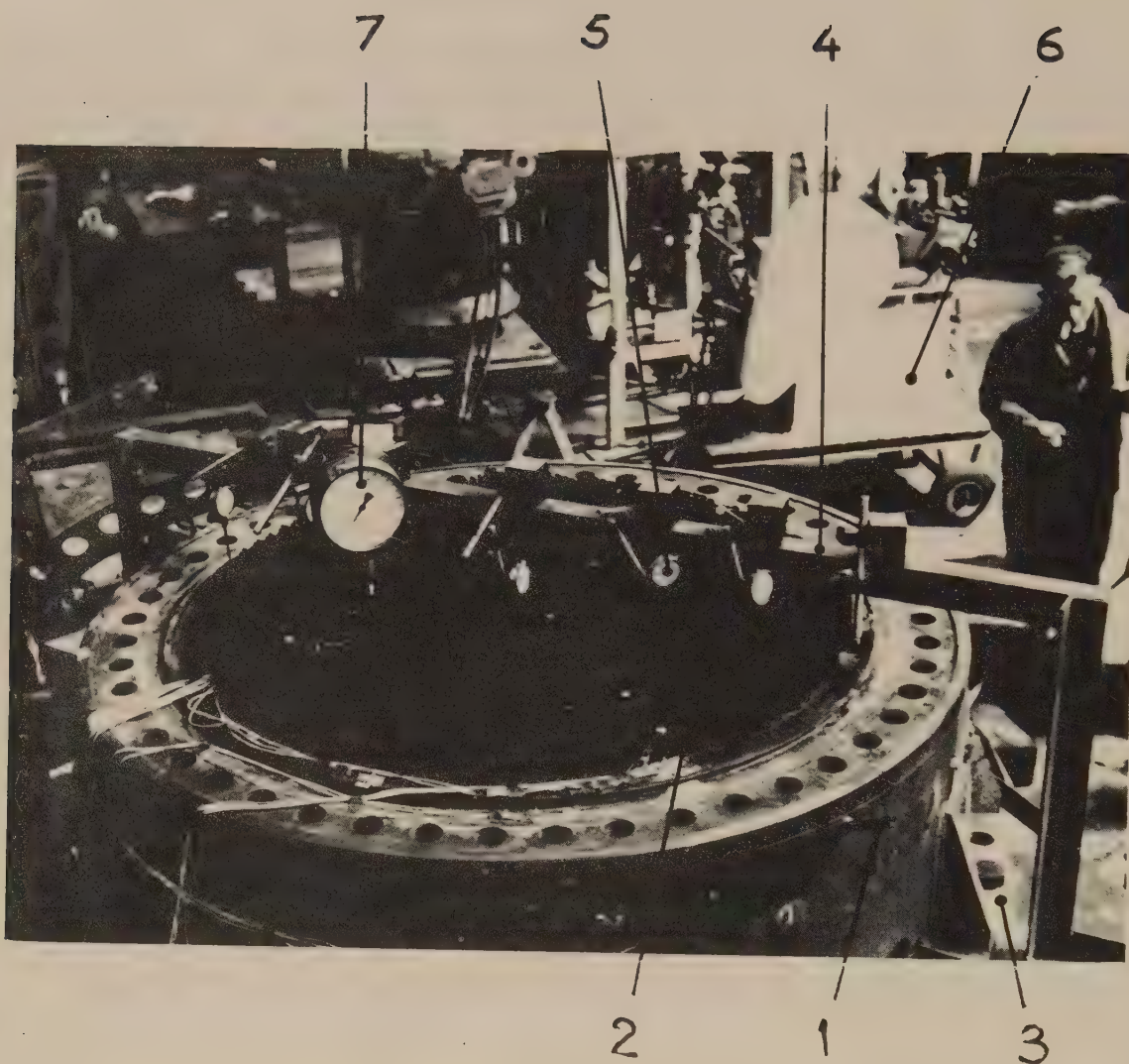


Fig. III-2,1-1. Installation générale par la mesure des déformations et des contraintes de la boîte à eau de l'échangeur.

- (1): boîte à eau de l'échangeur
- (2): plaque à tubes
- (3): bâti supportant l'échangeur
- (4): barre horizontale permettant le montage des comparateurs
- (5): comparateurs micrométriques
- (6): pompe électrique
- (7): manomètre

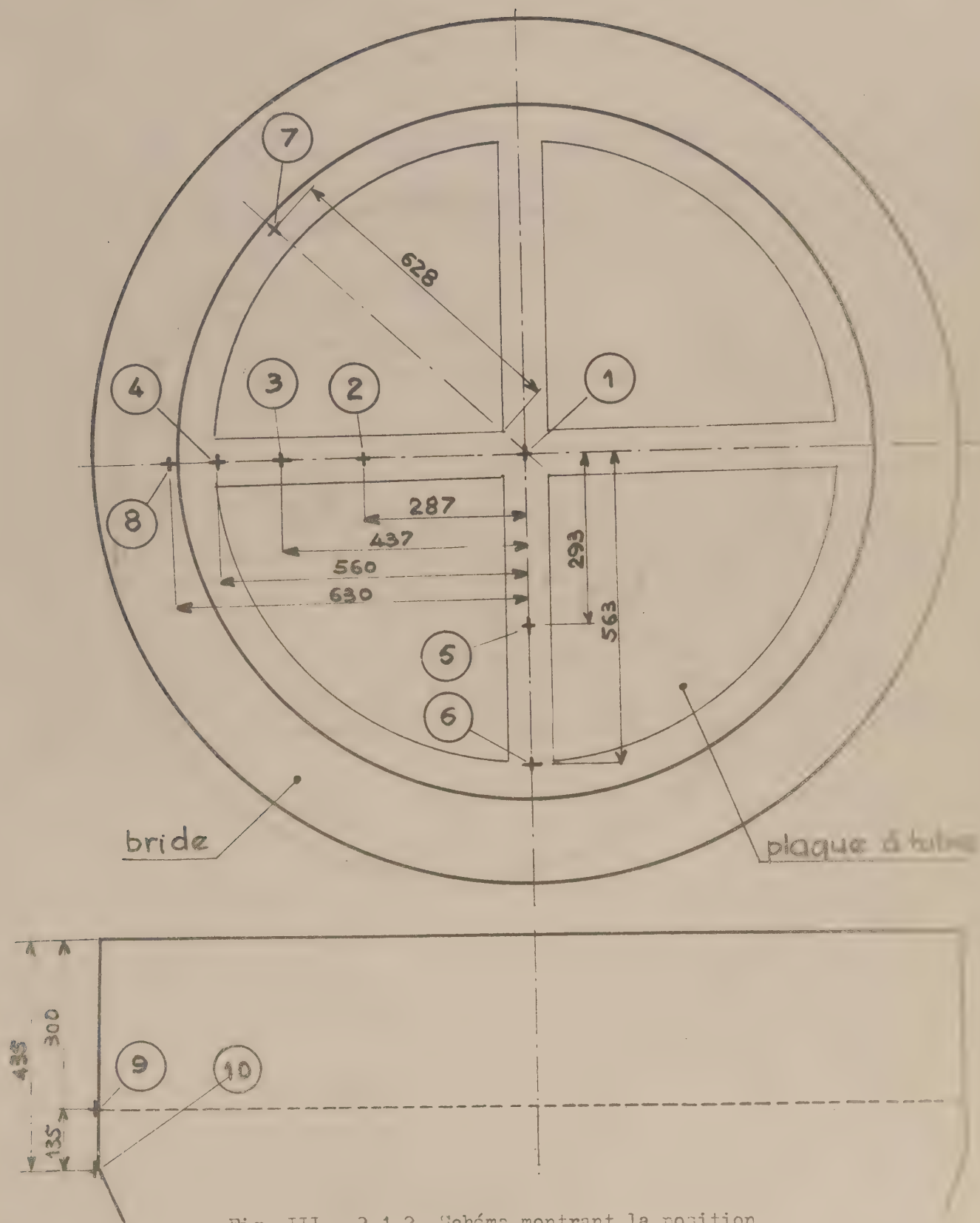


Fig. III - 2,1-2. Schéma montrant la position des jauges.

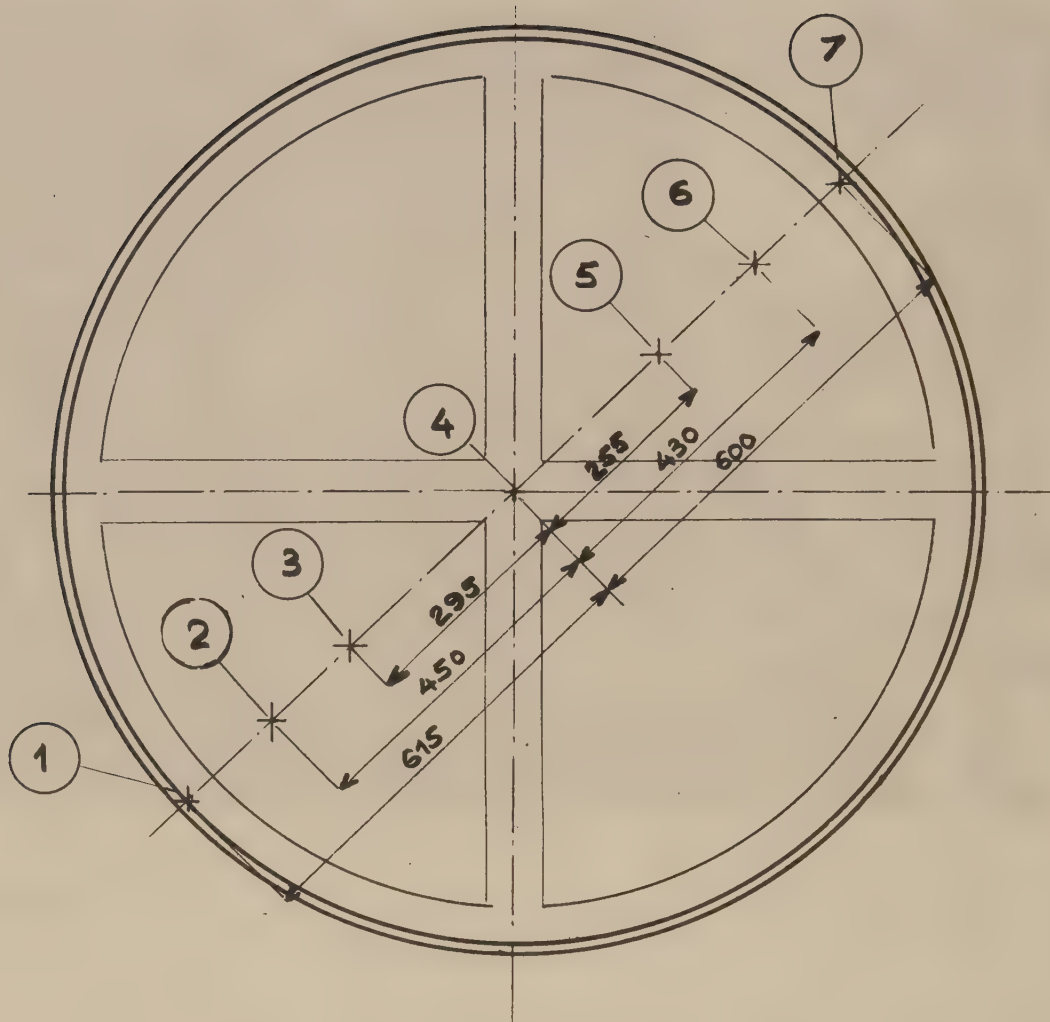


Fig. III - 2,1-3. Schéma montrant la position des comparateurs.

où $E = 2,06.10^4$ hectobars.

$\nu = 0,3$.

σ_1 : contrainte radiale si c'est dans la plaque,
contrainte axiale si c'est dans la virole.

σ_2 : contrainte tangentielle si c'est dans la plaque,
contrainte circonférentielle si c'est dans la virole.

III - 2,3. RESULTATS EXPERIMENTAUX.

III - 2,31 - Flèche de la plaque.

A la pression $p = 98$ bars, les différents comparateurs ont indiqués :

Tableau III - 2,1-4

Distance des comparateurs au centre de la plaque en mm	615	450	295	0	255	430	600
Flèche en mm	0,10	0,24	0,36	0,44	0,38	0,25	0,12

Nous remarquons que la flèche au rayon $a = 615$ mm (comparateur 1) n'est pas nulle mais égale à 0,10 mm. Ceci est dû à la rotation de la bride. Or dans notre calcul, nous avons considéré la flèche nulle au bord $a = 615$ mm. Pour pouvoir comparer avec les résultats théoriques, il faut faire une translation de 0,10 mm.

On obtient les valeurs finales, lorsque le bord a une flèche nulle :

Tableau III - 2,1-5

Distance des comparateurs au centre de la plaque en mm	615	450	295	0	255	430	600
Flèche en mm	0	0,14	0,26	0,34	0,28	0,15	0,02

(voir Fig. I-1-3,1-1)

III - 2,32 - Contraintes :

A la pression $p = 98$ bars, nous avons relevé les déformations données par les jauges. les contraintes mesurées sont obtenues par les relations (III-2,2-1) .

Tableau III - 2,1-6

Contraintes mesurées en différents points de la boîte à eau.

N° de jauge	ϵ_1 en μD	ϵ_2 en μD	σ_1 (hectobars)	σ_2 (hectobars)
1	230	245	6,57	6,81
2	144	207	4,41	5,39
3	38	126	1,67	2,94
4	- 72	100	- 0,88	1,67
5	136	213	4,32	5,49
6	- 70	107	- 0,78	1,86
7	166	120	4,31	3,63
8	- 185	110	- 3,24	1,18
9	- 315	335	- 4,61	5,19
10	100	10	2,25	0,88

(voir Fig. III-3,2-2, 4 et 7)

III - 3. COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX .

III - 3,1. FLECHES .

Les flèches calculées par différentes théories et la flèche mesurée expérimentalement sont représentées sur la même figure III-3,1-1.

Les flèches calculées en utilisant les constantes élastiques équivalentes de HORVAY et MALKIN (tubes inclus) sont nettement trop grandes par rapport à la flèche expérimentale.

Par contre, les flèches obtenues en utilisant les coefficients de déflexion de MILLER, DUNCAN et VOLOSHIN sont plus faibles.

La flèche calculée suivant la méthode des constantes élastiques équivalentes, en utilisant les constantes élastiques de O'DONNELL et en incluant les tubes est la plus concordante avec l'expérience.

L'écart de la flèche calculée au centre de la plaque par rapport à la flèche mesurée a pour valeur :

	MILLER	DUNCAN	VOLOSHIN	HORVAY	MALKIN	O'DONNELL
Ecart en %	- 24 %	- 18 %	- 10 %	+ 33 %	+ 38 %	+ 6,5 %

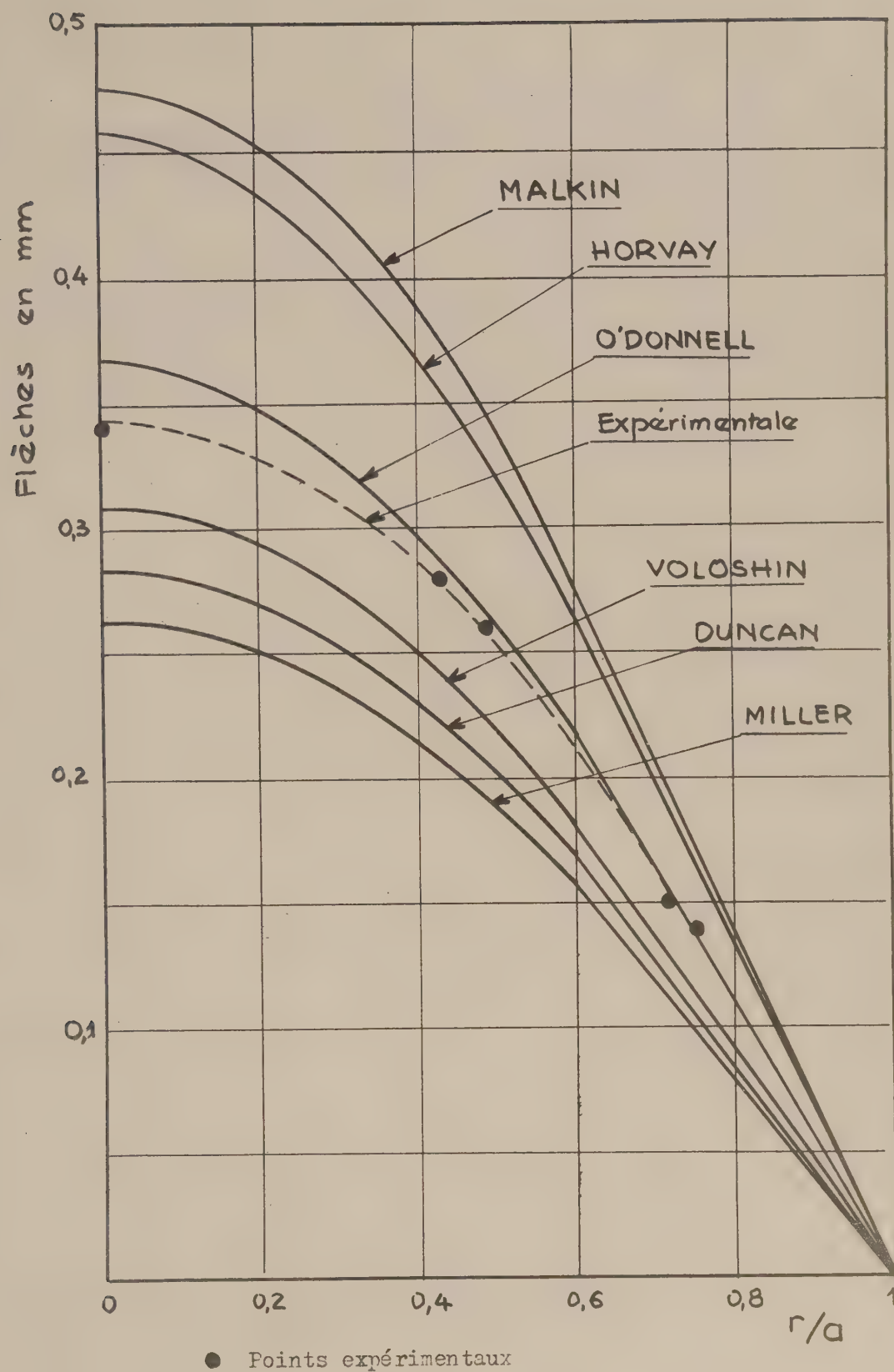


Fig. III - 3,1-1. Comparaison des flèches calculées par diverses théories avec la flèche mesurée.

III - 3,2. CONTRAINTES.

III - 3,21 - Contraintes dans la plaque percée.

au § III-1,312, nous avons calculé les contraintes dans la plaque équivalente et les contraintes maximales pour différentes théories.

Nous constatons que :

1°) Les contraintes dans la plaque équivalente sont plus grandes lorsque les plaques sont rigides. Ceci paraît anormal à priori, mais si nous regardons le tableau III-1,2-3, nous remarquons que dans ce cas on approche davantage d'un appui simple. Il est donc logique de trouver les contraintes au centre plus grandes pour les plaques dont la rigidité est prise trop grande.

2°) Les contraintes maximales dans la plaque réelle dépendent essentiellement des facteurs de majoration de contrainte. Nous les avons calculé à titre d'information, mais aucune conclusion n'est possible car nos jauges ne sont pas collées sur les ligaments, donc ne permettent pas de comparaisons.

Puisque les jauges sont collées sur les bandes non perforées, pour comparer les résultats théoriques et expérimentaux, nous devons nous fixer le choix du facteur de majoration de contrainte.

DUNCAN [5], a établi ce facteur de majoration de contrainte en mesurant les contraintes dans la bande non perforée et les contraintes dans la plaque similaire pleine, c'est le facteur Y que nous avons trouvé pour DUNCAN au § III-1,22.

Utilisant ce même facteur $Y = 1,47$ pour différentes théories, on trouve :

Tableau III - 3,2-1

Contraintes radiales théoriques dans la bande non percée (en hectobars).

$k = r/a$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
MILLER	6,99	6,68	5,80	4,30	2,20	- 0,49
DUNCAN	6,94	6,62	5,74	4,26	2,04	- 0,53
VOLOSHIN	6,78	6,49	5,62	4,12	2,02	- 0,67
HORVAY	6,57	6,23	5,21	3,76	1,61	- 1,18
MALFIN	6,06	6,68	4,90	3,45	1,42	- 1,22
O'DONNELL	6,49	6,18	5,29	3,80	1,70	- 0,99

Les diverses contraintes radiales ainsi calculées et la contrainte mesurée (tab. III-2,1-6) sont portées sur la même fig. II-3,2-2 pour la comparaison.

III - 3,22 - Contraintes dans le fond hémisphérique.

a) Contraintes axiales.

Les résultats théoriques et expérimentaux sont réunis

dans le même tableau pour la comparaison :

Tableau III - 3,2-3

	MILLER	DUNCAN	VOLOSHIN	HORVAY	MALKIN	O'DONNELL	Exp ^{al}
$ \sigma_a _{x=0}$	- 4,48	- 4,92	- 6,06	- 10,05	- 10,43	- 8,49	- 4,51
$ \sigma_a _{x=135}$	4,06	3,80	3,22	0,98	0,78	1,98	,21

Les contraintes sont en hectobars.

La distance x précise la position des jauges par rapport au plan de discontinuité Fig. III-3,2-4 .

Les résultats sont portés sur la même figure III-3,2-4 .

b) Contraintes circonférentielles .

Tableau III - 3,2-5

	MILLER	DUNCAN	VOLOSHIN	HORVAY	MALKIN	O'DONNELL	Exp ^{al}
$ \sigma_c _{x=0}$	7,56	7,30	6,62	4,27	4,02	5,18	5,19
$ \sigma_c _{x=135}$	7,81	7,77	7,65	7,25	7,19	7,40	0,88

Les contraintes sont en hectobars.

(voir Fig. III-3,2-4)

III - 3,23 - Contrainte dans la bride .

Tableau III - 3,2-6

	MILLER	DUNCAN	VOLOSHIN	HORVAY	MALKIN	O'DONNELL	Exp ^{al}
σ_{max}	2,17	2,22	2,41	2,92	2,97	2,71	3,63

Les contraintes sont en hectobars.

(voir Fig. III-3,2-7)

Interprétation des résultats .

En examinant le Fig. III-3,2-2, nous voyons que la contrainte expérimentale au centre coïncide bien avec celles obtenues par le calcul. Par contre, les contraintes données par les jauges (2) et (3) sont plus faibles. Le point où la contrainte radiale s'annule est légèrement déplacé vers le centre. Ceci est dû probablement au bord non percé que nous avons négligé. Malgré cela, l'accord reste bon.

Les tableaux III-3,2-5 et 6 et la Fig. III-3,2-4 donnent la comparaison des résultats théoriques et expérimentaux. L'accord reste bon, mais nous ne pouvons conclure formellement, car dans cette région où se trouve les contraintes de discontinuité une petite variation de l'emplacement des jauges entraîne un écart important de la contrainte mesurée comme le montre la Fig. III-3,2-4.

La Fig. III-3,2-7 donne la récapitulation des divers résultats.

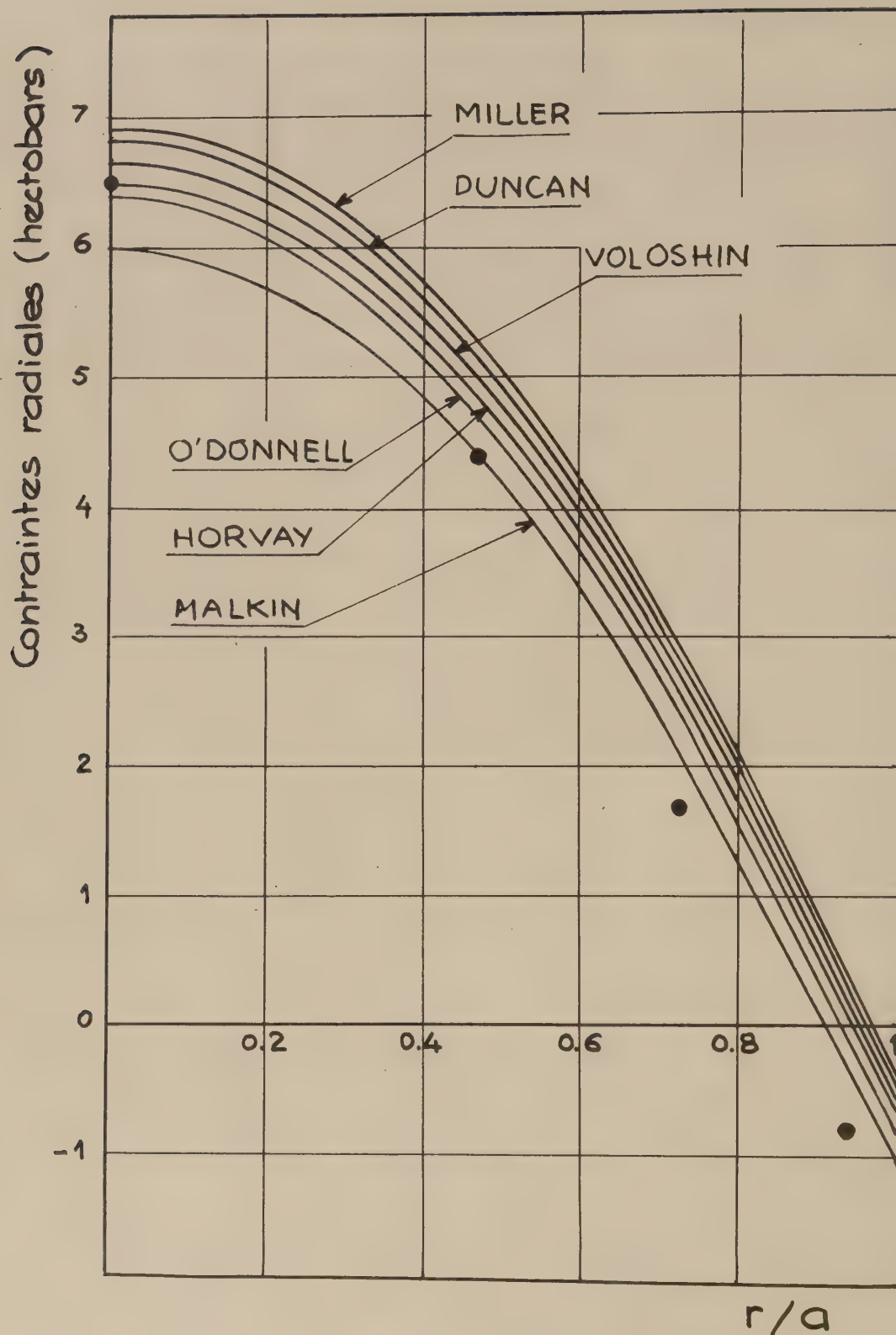


Fig. III - 3,2-2. Comparaison des contraintes calculées par diverses théories avec la contrainte mesurée.

● Points expérimentaux

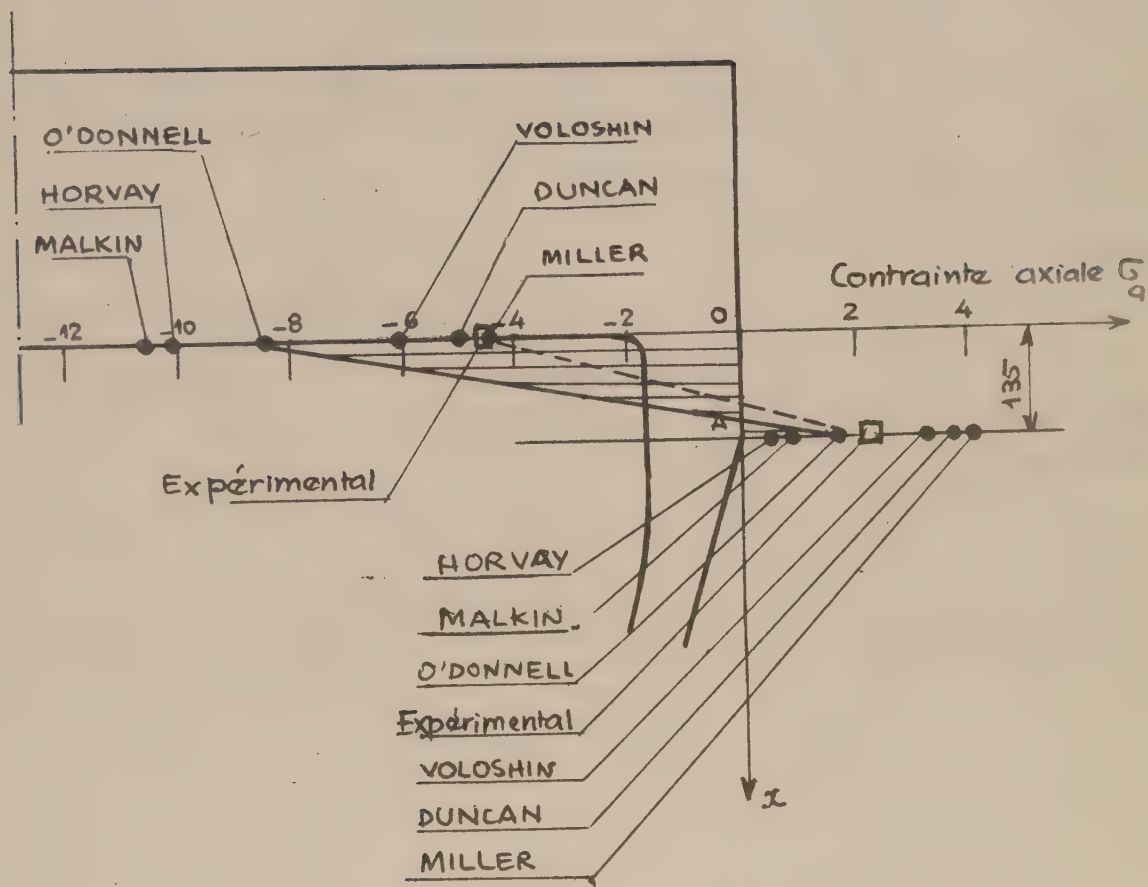


Fig. III - 3,2-4. Contrainte axiale.

- courbe théorique (O'DONNELL)
- - - courbe expérimentale
- points expérimentaux
- contraintes calculées par les autres théories.

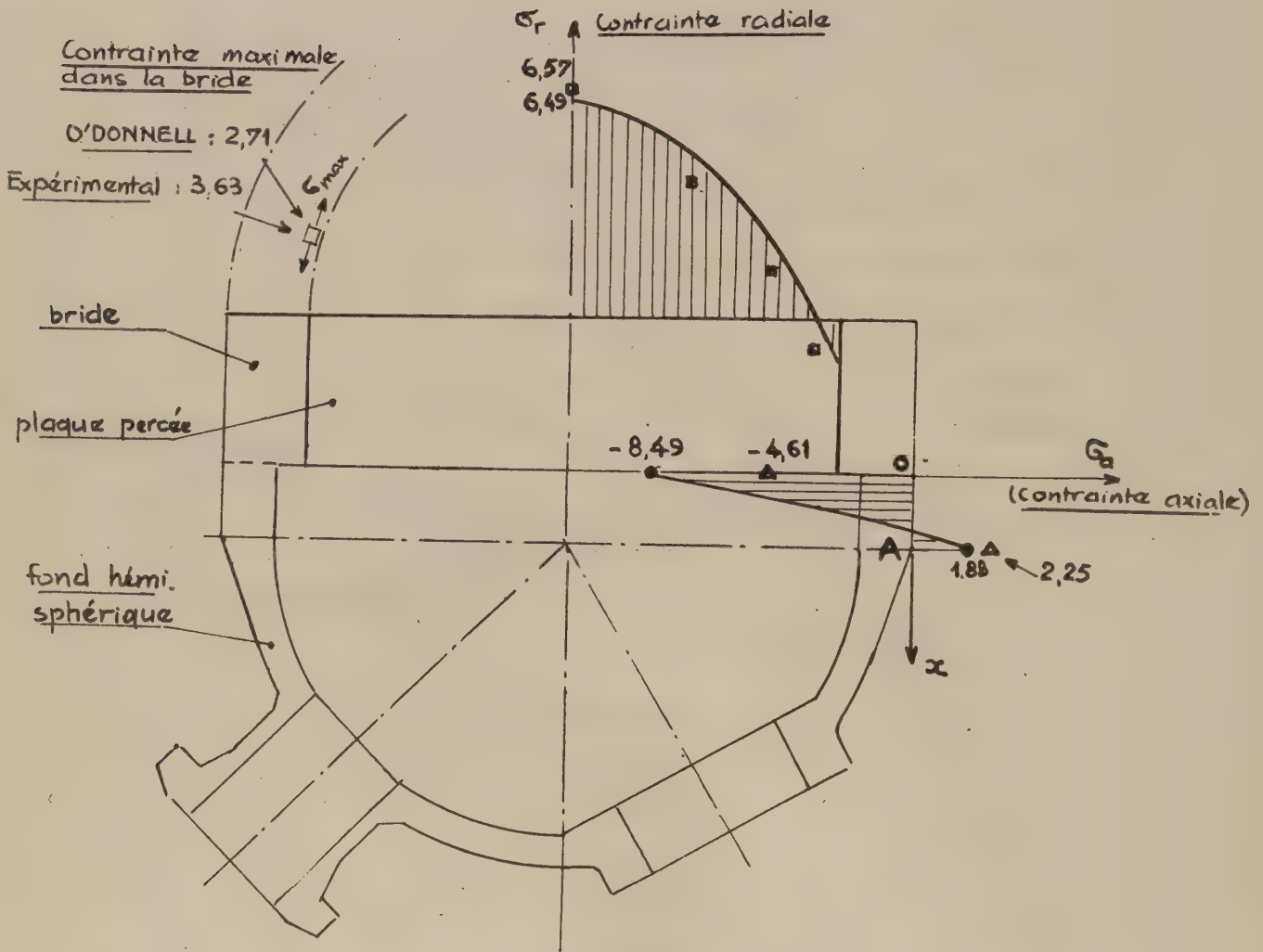


Fig. III - 3,2-7. Récapitulation des divers résultats expérimentaux par rapport à la théorie de O'DONNELL.

- contraintes radiales mesurées.
- △ contraintes axiales mesurées.
- résultats du calcul par la méthode O'DONNELL.
- point de discontinuité où la théorie s'écarte avec l'expérience.

Les contraintes sont en hectobars.

III - 4 . C O N C L U S I O N .

Nous avons utilisé la méthode d'analyse de capacité sous pression préconisée par le code ASME (article 1 - 7 - contraintes de discontinuité, Ed 65).

Pour la plaque à tubes, nous avons appliqué diverses méthodes de calcul en tenant compte des résultats de nos études antérieures, à savoir que les tubes participent intégralement à la rigidité. La plaque tubulaire a été traitée comme une plaque percée au diamètre intérieur des tubes.

Les flèches calculées avec les constantes élastiques équivalentes de HORVAY et de MALKIN sont respectivement de 33 % et 38 % par excès par rapport à la flèche expérimentale.

Les flèches calculées avec les coefficients de déflexion de MILLER, DUNCAN et VOLOSHIN sont respectivement de 24 %, 18 % et 10 % inférieurs par rapport à la flèche mesurée.

La flèche calculée avec les constantes élastiques de O'DONNELL, coïncide à 6,5 % avec l'expérience.

La rigidité de la plaque a influencé les contraintes dans la plaque et dans le reste de la structure.

La contrainte au centre de la plaque calculée avec les constantes élastiques équivalentes de O'DONNELL coïncide à 2 % près avec l'expérience.

Les plaques à tubes peuvent être calculées avec une précision meilleure que 7 % lorsqu'on utilise la méthode des constantes élastiques équivalentes avec les constantes de O'DONNELL, à condition de prendre le diamètre des trous de diamètre intérieur des tubes.

- CONCLUSION GENERALE -

-:-:-

En ce qui concerne le calcul des plaques percées sans tubes, nous pouvons avancer les conclusions suivantes :

- La méthode des coefficients de ligament et de déflexion, si elle est simple à appliquer, est peu rigoureuse et de ce fait, ne permet pas une analyse précise des contraintes et des déformations.

- La méthode des constantes élastiques équivalentes est plus rationnelle. Nous avons pu vérifier que parmi les valeurs proposées pour les constantes élastiques équivalentes, celles d'O'DONNELL donnent les résultats les plus concordants avec l'expérience.

Avec les constantes élastiques équivalentes d'O'DONNELL, les courbes de majoration de contrainte au bord des trous et les courbes de distribution de contrainte dans une section minimale de ligament dont nous disposons actuellement, nous pouvons calculer les contraintes et les déformations d'une plaque percée selon un réseau à mailles triangulaires équilatérales, avec une précision suffisante en vue des applications industrielles.

Pour le calcul des plaques percées munies de tubes dudgeonnés, le problème est plus délicat, car il y a deux facteurs nouveaux qui interviennent : le matériau constituant les tubes et le degré du dudgeonnage.

Nos diverses études expérimentales nous ont permis de mettre en évidence qu'au point de vue flèche, on obtient un résultat meilleur, en tenant compte des tubes : on traite la plaque dudgeonnée comme une plaque percée au diamètre intérieur des tubes.

Par contre, il est difficile de donner une conclusion formelle quant aux contraintes, car le phénomène est très complexe. Les contraintes induites sont difficilement accessibles et dépendent essentiellement du degré du dudgeonnage. L'état de contrainte en un point du ligament dépend à son tour, de ces contraintes induites, puis du quinconçage et de l'état de chargement de la plaque qui peut provoquer un dédudgeonnage.

.../...

Après divers essais sur des plaques circulaires percées selon un réseau triangulaire et dont certaines étaient munies de tubes, notre conclusion précédente s'est trouvée confirmée dans son application sur un cas réel d'une boîte à eau d'un échangeur de chaleur déjà en service. La flèche ainsi calculée avec les constantes élastiques équivalentes de O'DONNELL a une très bonne concordance avec la flèche mesurée, alors que la flèche calculée avec celles de HORVAY et MALKIN est trop grande, même en incluant les tubes.

La théorie des plaques équivalentes, dans le domaine de l'Ingénieur, donne des résultats satisfaisants pour permettre le calcul de la rigidité de flexion avec ou sans tubes dudgeonnés. Par contre, elle est impuissante pour permettre de calculer la contrainte en un point quelconque d'un ligament. Nous n'avons pas encore trouvé, dans les publications, une solution analytique rigoureuse à ce problème, comme pour le cas d'une plaque infinie avec un seul trou.

-:-:-:-:-

B I B L I O G R A P H I E

- [1] GARDNER, KA. "Heat Exchanger Tube-Sheet Design".
Journal of Applied Mechanics, Vol. 15.
Trans. ASME, Vol. 70, 1948 pp. 377-385
- [2] GARDNER, K.A. "Heat Exchanger Tube-Sheet Design -2,
Fixed Tubes Sheets" - J. of Appl. Mechanics,
vol. 19, Trans. ASME Vol. 74, 1952 pp. 159-166.
- [3] GARDNER, K.A. "Heat Exchanger Tube-Sheet Design - 3,
U-Tubes and Bayonet Tube Sheets" - J. of
Appl. Mechanics, vol. 27, Trans. ASME, Series E,
vol. 82, 1960 pp. 25-33.
- [4] MILLER, K.A.G. "The design of Tube Plates in Heat Exchangers"-
Proceedings, I Mech. E. vol. 1B, 1952 pp. 215-231.
- [5] DUNCAN, J.P. "The structural Efficiency of Tubes Plates for
Heat Exchangers".
Proceedings, I. Mech. E. vol. 169, 1955 pp. 789-810.
- [6] VOLOSHIN, A.A. "Jestkost'i Prochnost' Perforirovannix Plastinok".
(La rigidité et la résistance des plaques percées)
extrait revue russe "Soudostroenie". Décembre 1963.
- [7] HORVAY, G. "The Plane Stress Problem of Perforated Plates".
J. of Applied Mechanics, vol. 19, Trans. ASME
vol. 74, 1952 pp. 355-360.
- [8] HORVAY, G. "Bending of Honeycombs and Perforated Plates".
J. of Applied Mechanics, vol. 19, Trans. ASME
vol. 74, 1952 pp. 122-123.
- [9] MALKIN, I. "Notes on Theoretical Basis for Design of Tube-Sheets
of Triangular Layout".
Trans. ASME, vol. 74, 1952 pp. 387-396
- [10] D'SYLVA, E. "Bending of Perforated Plates".
J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, 1962 pp. 49-50.
- [11] SAMPSON, R.C. "Photoelastic Frozen Stress Study of the effective
Elastic Constants of Perforated Materials".
WAPD - OLE - 319 - May 1959, disponible à O.T.S.
Dept of Commerce, Washington 25, D.C.
- [12] SAMPSON, R.C. "Photoelastic Analysis of Stress in Perforated
Materials Subject to Tension or Bending".
Bettis Technical Review WAPD - B T - 18, April 1960
disponible à O.T.S., Dept of Commerce, Washington, 25DC

- [13] LEVEN, M.M. "Preliminary Report on Deflexion of Tube-Sheets".
WAPD - OLE - 319 - May 1959, disponible à O.T.S.
Dept. of Commerce, Washington 25, D.C.
- [14] LEVEN, M.M. "Photoelastic Determination of Stresses in Tube-Sheets and comparaison with Calculated Values".
Beths Technical Review, WAPD - BT - 18 April 1960
Disponible à O.T.S. Dept. of Commerce,
Washington 25, D.C.
- [15] O'DONNELL, W.J. "Design of Perforated Plates".
ASME. Transactions - Journal of Engineering for
Industry - August 1962.
- [16] YI-UAN-YU "Rational Analysis of Heat Exchanger Tube-Sheet Stress".
Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME
September 1956.
- [17] GALLETTY, G.O. "Some Results on Continuosly Drilled Fixed Tubes
SNOW, O.R. Plates", presented at the ASME Petroleum Conference
New Orleans, La. Sept. 1960. n° 60- PET - 16.
- [18] GOODIER, J.N. "The Holding Power and Hydraulic Tightness of
SCHOESSOW, GJ Expanded Tube Joints : Analysis of Stresses and
Deformations".
Trans. ASME vol. 65 n° 5. July 1942 .
- [19] GRIMISON, E.D. "Experimental Investigation of Tube Expanding".
LEE, G.H. Trans. ASME July 1943.
- [20] FISHER, F.F. "Tube Expanding and Related Subject".
BROWN, G.J. Trans. ASME May 1954.
- [21] SACHS, G. "Notes on the Tightness of Expanded Tube Joints".
Journal of Applied Mechanics, vol. 69, 1947.
- [22] CULVER, L.E. "Experimental Study of Some Variables of the Tube
FORD, H. Expanding process".
Chartered Mechanical Eng^r. Feb. 1959 .
- [23] ALEXANDER, J.M. "Experimental Investigation of the Process of
FORD, H. Expanding Boiler Tubes".
Trans. ASME, Jan. 1957.
- [24] GABORIT, J. "Etude Expérimentale du Dudgeonnage sur les
PORCHER, J. Echangeurs Principaux du Circuit Eau Lourde de
UGUEN, R. la Pile EL3".
ATMA, Session 1961.

- [25] SHANNON, W.B.
PRATT, C.W.
WEBB, T.B.
CARLSON, W.B. "Expanded Tube Joints on Boiler Drums with
Special Reference to the Bettersea High Pressure
Boilers".
Proceedings IME, vol. 154.
- [26] NADAI, A. "Theory of the Expanding of Boiler and Condenser
Tube Joints Through Rolling".
ASME, Trans. vol. 65, p. 865 - 1943.
- [27] NADAI, A. "Theory of Flow and Fracture of Solids".
vol. 1, 2nd Edition Mc Grow Hill Book
Company, New-York 1950.
- [28] T.E.M.A. "Standards of the Tubular Exchanger Manufacturers
Association".
3rd Editions, New-York.
- [29] SAUNDERS, EAD "Design Codes for Tubular Heat Exchangers".
Chemical and Progress Engineering, Aug. 1969.
- [30] FROCHT, M.M. "Photoelasticity".
vol. 1, John Wiley, Sons, Inc, New-York 1962.
- [31] KRAUS, H. "Pressure and Thermal Stresses in U. Tubes Steam
Generators for Nuclear Power Plans. Bettis Technical
Review, 1960.
- [32] HARVEY, J.F. "Pressure Vessel Design : Nuclear and Chemical
Applications".
D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton.
New-Jersey, 1963.
- [33] PFENNIGWERTH, P.L. "Stress Analysis with Applications to Pressurized
Water Reactors".
Jan. 1963. O.T.S., Dept. of Commerce,
Washington 25, D.C.
- [34] TIMOSHENKO, S. "Théorie des Plaques et des Coques".
Traduit de la 2ème Edition.
Librairie Polytechnique CH. Beranger Paris 1961.
- [35] TIMOSHENKO, S. "Théorie de l'Elasticité".
Traduit de la 2ème Edition.
Librairie Polytechnique CH. Beranger PARIS 1951
- [36] TIMOSHENKO, S. "Résistance des Matériaux" 2ème partie.
Traduit de la 2ème Edition.
Librairie Polytechnique CH. Beranger, PARIS 1954.
- [37] HAMEL
PERSON "Influence des parties non percées" dans les
plaques à tubes de l'Echangeur".
Rapport n° NI 34 T2. 1966
E.C.A.N. d'Indret.

- [38] S.N.C.T. "Code de Construction des Récipients sous Pression non soumis à l'action de la flamme".
Syndicat National de la Chaudronnerie et de la Tôlerie. 2ème Edition 1958.
- [39] TARDY, D. "Contribution à l'Etude du Seuil de Plasticité
Thèse (1960) Disponible à la Faculté des Sciences
de l'Université de Nantes.

Deuxième Thèse

Propositions données
par la Faculté

ANALYSE DE CONTRAINTES ET DE DEFORMATIONS DES
STRUCTURES A SYMETRIE AXIALE

VU

Le Directeur de thèse :

D. TARDY

VU

Le Président du Jury :

Y. PIRONNEAU

VU et APPROUVE:

NANTES, le

18 AVR. 1967

Le Doyen de la Faculté des Sciences :

G. BRILLOUET

VU et PERMIS D'IMPRIMER

NANTES, le

18 AVR. 1967

Le Recteur de l'Académie de NANTES
Président du Conseil de l'Université

M. SCHMITT

